

Παράδειγμα 2. Κατανομή της θερμοκρασίας σε τοίχο θερμαινόμενο από την μία πλευρική του επιφάνεια

Τοίχος πάχους L με αρχική θερμοκρασία $u(x,0) = 0$ δέχεται στην επιφάνεια $x = L$ αυτού θερμότητα q ανά μονάδα επιφανείας για $t \geq 0$ ενώ η άλλη επιφάνεια αυτού κρατείται σε σταθερή θερμοκρασία u_0 . Να προσδιοριστεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ του τοίχου.

Λύση: Ο τοίχος εκτείνεται στην περιοχή $0 \leq x \leq L$. Έστω $u(x,t)$ η θερμοκρασία του. Η διαφορική εξίσωση, η οποία περιγράφει την κατανομή της είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3.39)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = u_0, \quad -k \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q, \quad (3.3.40)$$

και με αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = 0. \quad (3.3.41)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θέτουμε

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x). \quad (3.3.42)$$

Η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (3.3.43)$$

Ακολούθως απαιτούμε να ισχύουν οι επί μέρους εξισώσεις

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.3.44)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$w(0) = u_0, \quad -k \frac{dw(L)}{dx} = q \quad (3.3.45)$$

και

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.3.46)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0. \quad (3.3.47)$$

Η λύση της (3.3.25) που ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνθήκες (3.3.26) είναι

$$w = u_0 - \frac{q}{k} x.$$

Η λύση της (3.3.27) η οποία πληροί τις συνοριακές συνθήκες (3.3.28) είναι

$$v(x,t) = A \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2L} e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t},$$

οπότε η γενική λύση της (3.3.20) είναι

$$u(x,t) = u_0 - \frac{q}{k} x + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2L} e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t}. \quad (3.3.48)$$

Στην (3.3.29) εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ και ευρίσκουμε

$$-u_0 + \frac{q}{k} x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Από αυτήν υπολογίζονται οι συντελεστές

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \left(-u_0 + \frac{q}{k} x\right) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2L} dx.$$