Παράδειγμα 2. Κατανομή της θερμοκρασίας σε τοίχο θερμαινόμενο από την μία πλευρική του επιφάνεια

Τοίχος πάχους L με αρχική θερμοκρασία $u(x,0) = 0$ δέχεται στην επιφάνεια $x = L$ αυτού θερμότητα q ανά μονάδα επιφανείας για $t \geq 0$ ενώ η άλλη επιφάνεια αυτού κρατείται σε σταθερή θερμοκρασία u_0. Να προσδιοριστεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ του τοίχου.

Λύση: Ο τοίχος εκτείνεται στην περιοχή $0 \leq x \leq L$. Έστω $u(x,t)$ η θερμοκρασία του. Η διαφορική εξίσωση, η οποία περιγράφει την κατανομή της είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.3.39}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = u_0 , \quad -k\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = q , \tag{3.3.40}$$

και με αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = 0 . \tag{3.3.41}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενείς. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θέτουμε

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x) . \tag{3.3.42}$$

Η αρχική διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} . \tag{3.3.43}$$

Ακολούθως απαιτούμε να ισχύουν οι επί μέρους εξισώσεις

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{3.3.44}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$w(0) = u_0 , \quad -k\frac{dw(L)}{dx} = q \tag{3.3.45}$$

και

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \tag{3.3.46}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\upsilon(0,t) = 0, \frac{\partial \upsilon(L,t)}{\partial x} = 0 . \tag{3.3.47}$$

Η λύση της (3.3.25) που ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνθήκες (3.3.26) είναι

$$w = u_0 - \frac{q}{k}x .$$

Η λύση της (3.3.27) η οποία πληροί τις συνοριακές συνθήκες (3.3.28) είναι

$$\upsilon(x,t) = A\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L} e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t} ,$$

οπότε η γενική λύση της (3.3.20) είναι

$$u(x,t) = u_0 - \frac{q}{k}x + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L} e^{-\left(\frac{(2k+1)\alpha\pi}{2L}\right)^2 t} . \tag{3.3.48}$$

Στην (3.3.29) εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ και ευρίσκουμε

$$-u_0 + \frac{q}{k}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L} .$$

Από αυτήν υπολογίζονται οι συντελεστές

$$A_k = -\frac{2}{L}\int_0^L \left(-u_0 + \frac{q}{k}x\right)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L} dx .$$