

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ – ΕΙΔΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

1. Οι ακόλουθες ΜΔΕ είναι γραμμικές ή μη γραμμικές και γιατί;

$$u(x, y)u_{xx} + u(x, y)u_{yy} + u_z = 0, \quad u_{xx} + a(x, y)u_{yy} = (1/k)u_t,$$

$$u_{xx} + (x^2 + 1)u_x = (1/k)u_t, \quad \sqrt{1+u} + u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

2. Ποιες μαθηματικές μεθόδους επίλυσης ΜΔΕ γνωρίζεται; Περιγράψτε με ποιο τρόπο θα επιλύατε τις διαφορές ΜΔΕ.
3. Τι ονομάζουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet (essential), Neuman (natural), Robin, mixed type;
4. Τι ονομάζουμε «Προβλήματα Ιδιοτιμών» και τι «Ειδικές Συναρτήσεις»;
5. Ποιες συναρτήσεις είναι αναπτύξιμες σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων;
6. Ποιες ΜΔΕ μπορούμε να λύσουμε με την βοήθεια της συνάρτησης Green; Ποια η φυσική της σημασία;
7. Πως επιλύουμε μια ΜΔΕ μιας διανυσματικής συνάρτησης;
8. Ποια συνάρτηση ονομάζουμε «Σφαιρική Αρμονική»;

(2,5 Μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίδεται ακίνητη οριζόντια αβαρής χορδή μήκους  $L$  με ακλόνητα άκρα στα σημεία  $x = 0, x = L$ . Κατά την στιγμή  $t$  εφαρμόζεται επί της χορδής δύναμη  $F$  ανά μονάδα μήκους της χορδής. Η δύναμη είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε όλο το μήκος της χορδής και εξακολουθεί να δρα επ' αυτής για  $t > 0$ . Να μελετηθούν οι εγκάρσιες ταλαντώσεις της χορδής.

(Δίνεται ότι η διαφορική εξίσωση του εγκάρσιου κύματος επί ομογενούς χορδής υπό την επίδραση καθέτου

δυνάμεως γράφεται ως  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F}{\tau}$ , όπου  $(\tau)$  είναι η τάση ανά μονάδα μήκους.)

(2,5 Μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , με τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(L, t) = \mu_2(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x).$$

(2,5 Μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Τι είδους είναι τα κατωτέρω ολοκληρώματα και γιατί; Να υπολογισθούν τα (α), (γ), (δ).

$$(α) \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad (β) \int_{-\infty}^1 e^x dx, \quad (γ) \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (δ) \int_1^2 \frac{1}{1-x} dx, \quad (ε) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

(1 Μονάδα)

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>**

Να μελετηθούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές: (α)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n}$  και (β)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n+3)}$ .

(1 Μονάδα)

**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>**

Να αναλυθεί η συνάρτηση  $f(x) = x$ , με  $0 \leq x \leq 2$ ,

(α) σε σειρά ημιτόνων, (β) σειρά συνημιτόνων, (γ) σε σειρά Fourier.

(1 Μονάδα)

**ΘΕΜΑ 7<sup>ο</sup>**

- 1) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $u = 2(x^2 - y^2) - 2xy - y + 5$  είναι αρμονική.  
Βρείτε μια συνάρτηση  $v$  τέτοια ώστε  $f(z) = u + iv$  να είναι αναλυτική.  
Εκφράστε την  $f(z)$  συναρτήσει του  $z$ .
- 2) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad a > 0, b > 0 \quad a \neq b.$$

**(2,5 Μονάδες)**