και επειδή $\left.\dfrac{\partial^2 d^2}{\partial x_1^{\,2}}\right|_{x_1=1/2} = 7.56492 > 0$

η απόσταση d γίνεται ελάχιστη. Τα αντίστοιχα σημεία των καμπυλών είναι:

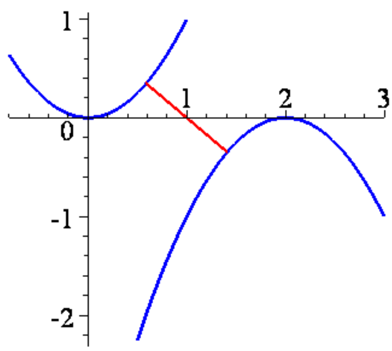
$$\mathrm{P}_1\left(x_1, y_1\right)\Big|_{x_1=0.58975} = \mathrm{P}_1\left(x_1, x_1^2\right)\Big|_{x_1=0.58975} = P_1\left(0.58975,\ 0.34780\right)$$

και

$$\mathrm{P}_2\left(x_2, y_2\right)\Big|_{x_2=1.41024} = \mathrm{P}_2\left(x_2, -(x_2-2)^2\right)\Big|_{x_2=1.41024} = P_2\left(1.41024,\ -0.34781\right)$$

και η ελάχιστη απόσταση είναι:

$$d\left(P_1,P_2\right)=\left.\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(-\left(x_2-2\right)^2-\left(x_1^2\right)\right)^2}\right|_{x_1=0.58975,\ x_2=1.41024} = 1.15709$$



6) Θεωρούμε έναν μεταλλικό κυκλικό δίσκο με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Ο δίσκος θερμαίνεται έτσι ώστε η θερμοκρασία T σε κάθε σημείο (x,y) δίνεται από την σχέση:

$$T(x,y)=x^2+2y^2-x$$

Βρείτε τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία του μεταλλικού δίσκου καθώς και τη θερμοκρασία τους.

Λύση: Τα ακρότατα θα αναζητηθούν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου και στην περιφέρεια του.

α) Στο εσωτερικό του δίσκου. Ψάχνουμε να βρούμε που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι του T. Έχουμε:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=2x-1=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y}=4y=0 \ \Rightarrow\ (x,y)=(1/2,0)$$

Χρησιμοποιούμε την ορίζουσα του Hess για να βρούμε το είδος του ακροτάτου:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=4,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}=0 \quad \Rightarrow \text{H}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=8$$

Επειδή H>0 και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$, το ακρότατο είναι ελάχιστο και το ελάχιστο αυτό είναι $T(1/2,0)=-1/4$

β) Στην περιφέρεια του δίσκου.

Α Τρόπος: Μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Έχουμε:

$$F=\left(x^2+2y^2-x\right)+\lambda\left(x^2+y^2-1\right) \;\Rightarrow$$

$$\nabla F=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+2y^2-x\right)+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)\right]\mathbf{i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+2y^2-x\right)+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)\right]\mathbf{j}=\mathbf{0} \;\Rightarrow$$

$$2x-1+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$4y+2\lambda y=0 \qquad (2)$$

Από την σχέση (2) διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Εάν $y=0$ τότε από την σχέση $x^2+y^2=1$ έχουμε $x=\pm1$. Τα κρίσιμα σημεία είναι: $\left(x,y\right)=\left(\pm1,0\right)$ με αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

$$T\left(1,0\right)=0 \quad \text{και} \quad T\left(-1,0\right)=2.$$

β) Εάν $y\neq0$ τότε από την (2) προκύπτει $\lambda=-2$ (3). Η (1) με την βοήθεια της (3) γράφεται $2x-1-4x=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{1}{2}$ (4) και από την σχέση $x^2+y^2=1$ βρίσκουμε το y:

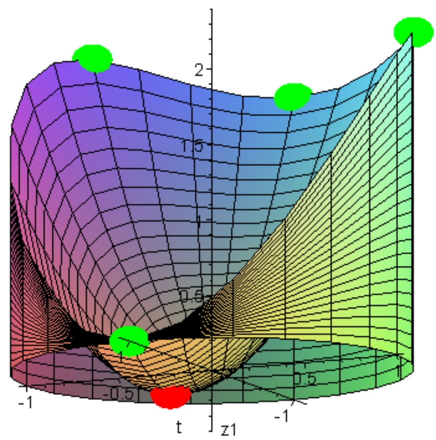
$$\frac{1}{4}+y^2-1=0 \;\Rightarrow\; y^2=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι $\left(x,y\right)=\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ με αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης:

$$T\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4},\quad T\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

Με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange τα ακρότατα πάνω στην περιφέρεια $x^2+y^2=1$ είναι:

$$T(1,0)=0,\ \ T(-1,0)=2,\quad T\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4},\quad T\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$$



Β τρόπος: Χρησιμοποιούμε τις συνήθεις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου: $x=\cos t,\ \ y=\sin t$, οπότε η θερμοκρασία $T(x,y)$ γράφεται σαν συνάρτηση του *t*:

$$T(\cos t,\sin t)=\cos^2 t+2\sin^2 t-\cos t=1+\sin^2 t-\cos t$$

Βρίσκουμε τα ακρότατα με τον συνήθη τρόπο:

$$\frac{dT}{dt}=2\sin t\cos t+\sin t=0\ \Rightarrow\ \sin t=0,\ \ \cos t=-\frac{1}{2}$$

1) $\sin t=0\ \Rightarrow\ t=0,\ t=\pi$

2) $\cos t=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ t=\frac{2}{3}\pi,\ \ t=\frac{4}{3}\pi$

1α) Για $t=0\ \Rightarrow\ x=\cos 0=1,\ \ y=\sin 0=0$. Ακρότατο σημείο (1,0)

1β) Για $t=\pi \Rightarrow x=\cos\pi=-1,\ y=\sin\pi=0$. Ακρότατο σημείο (-1,0)

2α) Για $t=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow x=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ y=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2β) Για $t=\frac{4}{3}\pi \Rightarrow x=\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ y=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Χαρακτηρισμός των ακροτάτων χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο:

Έχουμε: $\frac{d^2T(t)}{dt^2}=2\cos^2 t-2\sin^2 t+\cos t$. Επομένως

1α) Για το ακρότατο σημείο (1,0), που αντιστοιχεί για $t=0$, έχουμε:

$\left.\frac{d^2T(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=2\cos^2 t-2\sin^2 t+\cos t\Big|_{t=0}=2+1=3>0$ άρα το σημείο (1,0) είναι σημείο ελαχίστου με ελάχιστο $T(1,0)=0$.

1β) Για το ακρότατο σημείο (-1,0), που αντιστοιχεί για $t=\pi$, έχουμε:

$\left.\frac{d^2T(t)}{dt^2}\right|_{t=\pi}=2\cos^2 t-2\sin^2 t+\cos t\Big|_{t=\pi}=2+1=3>0$ άρα το σημείο (-1,0) είναι σημείο ελαχίστου με ελάχιστο $T(-1,0)=2$.

2α) Για το ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που αντιστοιχεί για $t=\frac{2}{3}\pi$, έχουμε:

$\left.\frac{d^2T(t)}{dt^2}\right|_{t=\frac{2}{3}\pi}=2\cos^2 t-2\sin^2 t+\cos t\Big|_{t=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{3}{2}<0$ άρα το $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι σημείο μεγίστου με μέγιστο $T\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$.

2β) Για το ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που αντιστοιχεί για $t=\frac{4}{3}\pi$, έχουμε:

$$\left.\frac{d^2T(t)}{dt^2}\right|_{t=\frac{4}{3}\pi} = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + \cos t\Big|_{t=\frac{4}{3}\pi} = -\frac{3}{2} < 0$$ άρα το σημείο $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$είναι σημείο μεγίστου με μέγιστο $T\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}$.

Γ τρόπος: Από την εξίσωση του κύκλου: $x^2+y^2=1$ λύνουμε ως προς $y^2=1-x^2$, (επειδή ο τύπος της θερμοκρασίας Τ δεν περιέχει y) και αντικαθιστούμε στον τύπο του T:

$$T(x) = x^2 + 2\left(1-x^2\right) - x = -x^2 - x + 2 \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dx} = -2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1/2$$

και από την σχέση $x^2+y^2=1$ βρίσκουμε $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως τα ακρότατα σημεία είναι $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Επειδή δε $\frac{d^2T}{dx^2}=-2<0$ τα σημεία αυτά είναι σημεία μεγίστου. Οι αντίστοιχες τιμές των μεγίστων είναι:

$$\mathrm{T}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4} \text{ και } \mathrm{T}\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

Όμως ακρότατα πρέπει να αναζητήσουμε και στα άκρα του διαστήματος [-1,1] μεταβολής του x. Όταν το x=-1 ή 1 το y είναι 0. Επομένως ακρότατα έχουμε στα σημεία (-1,0) και (1,0), τα οποία είναι σημεία ελαχίστου επειδή παρεμβάλλονται μεταξύ των σημείων $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που είναι σημεία μεγίστου. Οι αντίστοιχες τιμές των ελαχίστων είναι: $T(-1,0)=2,\ T(1,0)=0$.

Δ τρόπος: Εάν από την εξίσωση του δίσκου $x^2+y^2=1$ λύσουμε ως προς x θα έχουμε $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ και αντικαθιστώντας στον τύπο του T, βρίσκουμε:

$$T_+(y) = 1 - y^2 + 2y^2 - \sqrt{1-y^2} = y^2 + 1 - \sqrt{1-y^2} \text{ για } x = +\sqrt{1-y^2}$$

$$T_{-}(y) = 1 - y^2 + 2y^2 + \sqrt{1-y^2} = y^2 + 1 + \sqrt{1-y^2} \qquad x = -\sqrt{1-y^2}$$

Εύρεση των ακροτάτων

$$\frac{dT_{+}}{dy} = 2y - \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} = 2y + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{dT_{-}}{dy} = 2y + \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} = 2y - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \qquad \text{(B)}$$

α) Εάν $y = 0$ τότε $x = \pm 1$ και τα ακρότατα σημεία είναι $(\pm 1, 0)$.

Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο του T για τον χαρακτηρισμό των ακροτάτων αυτών σημείων:

$$\frac{d^2T_{+}}{dy^2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + y\left(-\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2y)\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + y^2\left(1-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2T_{-}}{dy^2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y\left(-\frac{1}{2}\left(1-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2y)\right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y^2\left(1-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Για $y = 0$ έχουμε $\left.\frac{d^2T_{+}}{dy^2}\right|_{y=0} = 2 + 1 = 3 > 0, \quad \left.\frac{d^2T_{-}}{dy^2}\right|_{y=0} = 2 - 1 = 1 > 0$

Επομένως τα ακρότατα $(\pm 1, 0)$ είναι σημεία ελαχίστων με T(1,0)=0 και T(-1,0)=2.

β) Εάν $y \neq 0$ τότε από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου

$\frac{dT_{+}}{dy} = 2y + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ προκύπτουν μιγαδικές τιμές για το y και η περίπτωση αυτή, που αντιστοιχεί για $x = \sqrt{1-y^2}$ απορρίπτεται. Επομένως θα έχουμε μόνο $x = -\sqrt{1-y^2}$.

Τώρα λύνουμε την εξίσωση:

$$\frac{dT_{-}}{dy} = 2y - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{1-y^2} = 4 \Rightarrow 4 - 4y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } x = -\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως τα ακρότατα σημεία είναι $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Υπολογίζουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για τον χαρακτηρισμό των ακροτάτων:

$$\left.\frac{d^2T_-}{dy^2}\right|_{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y^2\left(1-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\Bigg|_{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} - \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}} = -6 < 0$$

Άρα τα ακρότατα σημεία είναι σημεία μεγίστου.

7) Δίνεται η επιφάνεια *S*, που ορίζεται από την εξίσωση:

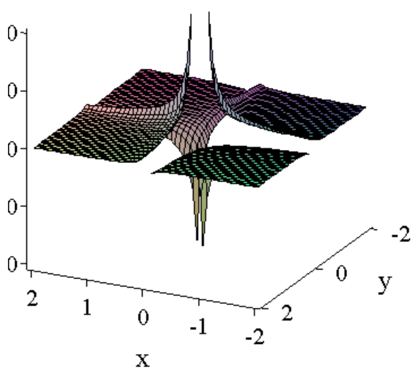
$z = g(x, y) = \frac{1}{xy}$. Να βρεθούν τα σημεία της *S* που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

Λύση: Η απόσταση του σημείου (x,y,z) από την αρχή $(0,0,0)$ δίνεται από την έκφραση:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Εάν $(x,y,z) \in S$, τότε η d εκφράζεται σαν μια συνάρτηση δυο μεταβλητών:

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}$$



Η συνάρτηση *d* τείνει στο άπειρο όταν τα *x*, *y* πλησιάζουν το μηδέν ή τείνουν στο άπειρο. Έτσι φαίνεται λογικό η συνάρτηση d να παίρνει μια ελάχιστη τιμή για κάποιες μη μηδενικές πεπερασμένες τιμές των *x* και *y*. Η *d* ελαχιστοποιείται όταν το υπόριζο ελαχιστοποιείται. Θέτουμε:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$$