ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 1995

1) Δίνονται οι επιφάνειες S_1 και S_2 με εξισώσεις :

$$F_1(x,y,z)=(x-c)^2+y^2+z^2-9=0 \quad \text{και} \quad F_2(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2-1=0$$

Να προσδιορισθεί η σταθερά c έτσι ώστε τα εφαπτόμενα επίπεδα σε κάθε σημείο τομής των επιφανειών να είναι κάθετα.

2) Να προσδιορισθεί το κέντρο μάζας της περιοχής T, η οποία ορίζεται από τις καμπύλες $y=0$, $y=\sin(x)$, $y=\cos(x)$ μέ $\pi/4 \le x \le \pi$, όταν η πυκνότητα είναι σταθερή.

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=\alpha$ και $z=\beta$ με $0<\beta<\alpha$ όταν $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$

4) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Gauss και να αποδειχθεί για την περίπτωση που το διανυσματικό πεδίο είναι της μορφής : $\mathbf{F}=\varphi(x,y,z)\mathbf{j}$

5) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα :

$$I = \iint_T (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dxdy$$

όπου το σύνορο της περιοχής T καθορίζεται από τις καμπύλες $y=0$, $y=\ln x$, $x=2$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα . Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 1995

1) Εάν η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στο σημείο (x_1, y_1, z_1) μιας επιφάνειας S είναι :

$$(x_1+z_1)(x-x_1)-(y_1+z_1)(y-y_1)+(x_1-y_1)(z-z_1)=0$$

και το σημείο (1,2,3) ανήκει στην επιφάνεια S, να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας.

2) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα : $I = \int_c \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου c το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$, εξαιρουμένου του τμήματος της που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο και που διαγράφεται κατά την θετική φορά.

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το τμήμα της κωνικής επιφάνειας $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων z=2 και z=1 όταν $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$

4) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Gauss και να αποδειχθεί για την περίπτωση που το διανυσματικό πεδίο είναι της μορφής : $\mathbf{F}=\varphi(x,y,z)\mathbf{i}$

5) Ποιά σχέση συνδέει τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \left[\int_\alpha^\beta f(x)dx\right]^2 \qquad \text{και} \qquad I_2 = \int_\alpha^\beta dx \int_x^\beta dy f(x)f(y)$$

(*Υπόδειξη : Μπορείτε να θεωρήσετε μια παράγουσα της* f(x))

Τα θέματα είναι ισοδύναμα . Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1995

1) Να υπολογιστεί η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου

$f=x^2+y^2-z^2$ στο σημείο $(1, 2\sqrt{2}, 9/2)$ κατά μήκος της καμπύλης :

$\{ 2z=x^2+y^2 , z=9/2\}$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C y^2dx + xydy + xzdz$ όπου C η καμπύλη $\{x^2+y^2=2y , y=z\}$

3) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του xy-επιπέδου στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα I, του οποίου η αναγωγή σε δυο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα είναι :

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dy$$

β) Να γίνει η αναστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα I

4) Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$ με $z\geq 0$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας $3z=x^2+y^2$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα . Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1995

1) Να υπολογιστεί η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου $f=x^2+y^2-z^2$ στο σημείο $(\sqrt{3}/4 , 1/2 , 3\sqrt{3}/2)$ κατά μήκος της καμπύλης :
$\{ x^2+y^2/4+z^2/9=1 , z=3\sqrt{3}/2 \}$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ όπου C η καμπύλη $\{x^2+y^2=1 , x+z/2=1\}$

3) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή Τ του xy-επιπέδου στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα Ι, του οποίου η αναγωγή σε δυο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα είναι :

$$I=\int_1^2 dy\int_0^{\ln y} e^{-x}dy$$

β) Να γίνει η αναστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Ι

4) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας $x^2+y^2=3z$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα . Καλή Επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Πρόοδος Α′ - 26 Μαρτίου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Να αποδειχθεί ο νόμος των ημιτόνων για ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ χρησιμοποιώντας την έννοια του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων.

(2,5)

2) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση

$$z=f(x,y)=\alpha+x+2y-x^2-3y^2$$

με την πλέον απότομη κάθοδο ξεκινώντας από το σημείο $P_0(0,0,\alpha)$)

(5)

3) Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές α και β έτσι ώστε η επιφάνεια με εξίσωση $\alpha x^2-\beta yz=(\alpha+2)x$ να τέμνει κάθετα την επιφάνεια με εξίσωση $4x^2y+z^3=4$ στο σημείο (1,-1,2)

(2,5)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Πρόοδος Α′ - 26 Μαρτίου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Έστω **v**=2**i**-**j**+2**k** και **u**=3**i**+4**j**-**k**. α) Να ορίσετε ένα διάνυσμα **w** τέτοι ώστε **v**×**w**=**u**. Υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις ; β) Να ορίσετε το διάνυσμα **w** τέτοιο ώστε **v**×**w**=**u** και **v**·**w**=1. ο ίδιο ερώτημα.

(2,5)

2) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση

$$z=f(x,y)=\frac{x^2}{2}-y^2$$

με την πλέον απότομη κάθοδο ξεκινώντας από το σημείο $P_0(-1,1,-1/2)$

(5)

3) Να προσδιοριστεί η σταθερά c έτσι ώστε σε κάθε σημείο της τομής των επιφανειών :

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3 \qquad \text{και} \qquad x^2+y^2+z^2=1$$

να αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα τους να είναι κάθετα μεταξύ τους.

(2,5)

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Πρόοδος Β′ - 7 Μαΐου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Δίνεται το δυναμικό πεδίο $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+x^6y^2\mathbf{j}$ και ένα υλικό σημείο, το οποίο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\alpha x^\beta$ με $\alpha,\beta>0$ από το σημείο (0,0) έως το σημείο (1,α). Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία το έργο της δύναμης **F** είναι ανεξάρτητο του β.

(4)

2) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας I_x της επίπεδης υλικής πλάκας Τ, που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2\leq\alpha^2$ με $x\geq0$, όταν η πυκνότητα της πλάκας δίνεται από τη σχέση $\rho=x$.

(2)

3) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου με ακτίνα R και μάζα Μ ως προς τον άξονα του, όταν η πυκνότητα του ρ σε κάθε σημείο είναι ανάλογη προς την απόσταση του σημείου από τον άξονα.

(4)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)
Πρόοδος Β′ - 7 Μαΐου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Δίνεται το δυναμικό πεδίο $\mathbf{F}=(3y^2+2)\mathbf{i}+6x\mathbf{j}$. Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για την μετακίνηση ενός υλικού σημείου από το σημείο (1,0) έως το σημείο (-1,0) κατά μήκος της έλλειψης $x^2+y^2/\beta^2=1$ και κατά την θετική φορά. Για ποιά τιμή του β το έργο έχει ακρότατο ; Τι είδους ακρότατο είναι ;

(4)

2) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας I_x της επίπεδης υλικής πλάκας Τ, που ορίζεται από τις σχέσεις $xy=4$, $x+y=5$, όταν η πυκνότητα της πλάκας δίνεται από τη σχέση $\rho=x/y$.

(2)

3) Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός κώνου ύψους h και ακτίνας βάσης R, αν η πυκνότητα ρ σε κάθε σημείο του είναι ανάλογη προς την απόσταση του σημείου από την βάση.

(4)

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Πρόοδος Γ′ - 30 Μαΐου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Θεωρούμε την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=\alpha x$. Να βρεθεί ο λόγος S_1/S_2 όπου S_1 είναι το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου και S_2 το εμβαδόν της υπόλοιπης επιφάνειας της σφαίρας.

(6)

2) Να αποδειχθεί ότι

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{G})dV = \oiint_S \mathbf{n} \times \mathbf{G}dS$$

όπου **G** ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, οριζόμενο στο στερεό V και S η επιφάνεια του στερεού.

(*Δίνεται* $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{\Gamma})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{\Gamma}$

(4)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Πρόοδος Γ′ - 30 Μαΐου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Σε μια σφαίρα ακτίνας α ανοίγουμε μια κυλινδρική τρύπα ακτίνας β, με β<α, έτσι ώστε ο άξονας της κυλινδρικής τρύπας να συμπίπτει με μια διάμετρο της σφαίρας. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που θα σχηματισθεί.

(6)

2) Να αποδειχθεί ότι

$$\iiint\limits_V \nabla f dV = \oiint\limits_S f\mathbf{n}dS$$

όπου f ένα διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο, οριζόμενο στο στερεό V και S η επιφάνεια του στερεού.

(4)

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

(Διανυσματική Ανάλυση)

Εξετάσεις Ιουνίου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Γιατί δεν ορίζεται η αντίστροφη πράξη του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ;

(1)

2) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί το θεώρημα του Green. (2)

3) Εαν **n** είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο σε κάθε σημείο της κλειστής επιφάνειας S, να δειχθεί ότι

$$\oiint_S \mathbf{n}\,dS = \mathbf{0}$$

όπου **0** το μηδενικό διάνυσμα. (1,5)

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\ln r\,\mathbf{i}-\frac{\partial}{\partial x}\ln r\,\mathbf{j}$ με $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\ \ +z\mathbf{k}$ και $r=|\mathbf{r}|$. Εάν C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης $x^2/4+y^2/9=1$, να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (2,5)

5) Θεωρούμε υλικό σύρμα σχήματος κυκλικής έλικας ακτίνας R και βήματος β και που αποτελείται από δυο σπείρες. Εάν η γραμμική πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho=\ln(r^2)$, να βρεθεί η μάζα του υλικού σύρματος. (3)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Εξετάσεις Ιουνίου 1996

Ονοματεπώνυμο ....

Α.Μ ....

1) Γιατί δεν ορίζεται η αντίστροφη πράξη του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων ;

(1)

2) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί το θεώρημα του Gauss. (2)

3) Να δειχθεί ότι για κάθε κλειστή επιφάνεια S ισχύει :

$$\oiint_S \vec{\mathbf{r}} \times dS = \vec{\mathbf{0}}$$

όπου $\vec{\mathbf{0}}$ το μηδενικό διάνυσμα. (1,5)

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{\mathbf{j}}$. Εάν C είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου, που ορίζεται από τις κορυφές (-2,2) , (2,-2) , (2,2) , (-2,2), να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ (2,5)

5) Θεωρούμε ευθύγραμμο υλικό σύρμα που ενώνει τα σημεία Α(1,2,3) και Β(3,2,1). Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του σύρματος ως προς την ευθεία με εξίσωση x=y=z, εάν η γραμμική του πυκνότητα είναι $\rho=1/(x-y)^2$. (3)

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1996

1) Θεωρούμε ένα κινητό, που κινείται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας R διαγράφοντας την καμπύλη $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Να δείξετε ότι η ταχύτητα $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$ είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$. (2)

2) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=x^2y^2\mathbf{i}-xy^3\mathbf{j}$ και C η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία O(0,0), A(1,0), B(1,1) κατά την φορά OAB (2,5)

3) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που ορίζεται από τις επιφάνειες $z=0$, $z=x^2+y^2$ και $x^2+y^2=\alpha^2$ (2,5)

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=0$, και $z=3$ (3)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ
(Διανυσματική Ανάλυση)

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1996

1) Θεωρούμε ένα κινητό, που κινείται πάνω στην καμπύλη $\mathbf{r}(t)=t\mathrm{i}+t^2\mathbf{j}+t\cos t\mathbf{k}$ και την χρονική στιγμή t=π εγκαταλείπει την καμπύλη. Να βρεθεί η θέση του κινητού την χρονική στιγμή t=2π. (2)

2) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}-x^2\mathbf{j}$ και C α) το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α=(1,0) και Β+(0,1) και β) κατά μήκος της περιφέρειας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και έχει κέντρο την αρχή των αξόνων. (2,5)

3) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού, που ορίζεται από το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ και τον κώνο $z^2= x^2+y^2$

(2,5)

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{I}-yz^2\mathbf{j}-y^2z\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ (3)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 1997

1) Έστω ότι η θερμοκρασία σε ένα τυχαίο σημείο (x,y,z) ενός δωματίου δίνεται από την σχέση : $T(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

α) Να βρεθεί η διεύθυνση ως προς την οποία πρέπει να κινηθεί ένα έντομο, που βρίσκεται στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, ώστε να νιώθει την ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία. *(0.5)*

β) Εάν υποθέσουμε ότι κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ στο σημείο $\mathbf{r}_0$ να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής της θερμοκρασίας στη μονάδα του χρόνου, όταν το έντομο διέρχεται από το σημείο αυτό. *(2)*

2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i}-\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$$

κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής, που ενώνει τα σημεία (-1,0), (0,-1), (1,0).

(2.5)

3) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $x^2+y^2-z=1$ με $z>0$ *(2.5)*

4) Έστω C η κλειστή καμπύλη, που είναι η τομή του επιπέδου $z=\alpha x+\beta y$ με τον κύλινδρο $x^2+y^2=1$. Προσδιορίστε τις τιμές των παραμέτρων α,β με $\alpha^2+\beta^2=1$ ώστε $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ με

$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}-y\mathbf{k}$ *(2.5)*

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 1997

1) Έστω ότι η θερμοκρασία σε ένα τυχαίο σημείο (x,y,z) ενός δωματίου δίνεται από την σχέση : $T(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$.

α) Να βρεθεί η διεύθυνση ως προς την οποία πρέπει να κινηθεί ένα έντομο, που βρίσκεται στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, ώστε να νιώθει την ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία. *(0.5)*

β) Εάν υποθέσουμε ότι κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ στο σημείο $\mathbf{r}_0$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στη μονάδα του χρόνου, όταν το έντομο διέρχεται από το σημείο αυτό. *(2)*

2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}-\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

κατά μήκος της τεθλασμένης γραμμής που ενώνει τα σημεία (-1,0), (0,1), (1,0).

(2.5)

3) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου

$\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ πάνω στην επιφάνεια S του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3) *(2.5)*

4) Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του μέρους της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο $[-\alpha,\alpha]\times[-\alpha,\alpha]$, όπου $2\alpha^2<R^2$ στο επίπεδο OXY δίνεται από την σχέση : $E=2\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

Εξηγείστε γιατί χρειάζεται ο περιορισμός $2\alpha^2<R^2$. *(2.5)*

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1997

1) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα :

$$I=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\exp\left(\frac{x}{x+y}\right)dxdy$$

2) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ και για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+2x\mathbf{j}-y^3\mathbf{k}$.

3) Δίνεται η καμπύλη C που ορίζεται σαν τομή των επιφανειών με εξισώσεις $x^2+y^2=4$ και $x/4+z/16=1$. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}=5r^3\mathbf{r}$ κατά μήκος της καμπύλης C που συνδέει τα σημεία (0,2,16) και (-2,0,24).

4) Να βρεθεί το κέντρο μάζας της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυκλικού ορθού κώνου ύψους h, αν η πυκνότητα σε κάθε σημείο της είναι ανάλογη προς την απόσταση του σημείου από την βάση και η γωνία μεταξύ του άξονα και μιας γενέτειρας του κώνου είναι π/3.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1997

1) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα :

$$I=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$$

2) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=2x^2y\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+4xz^2\mathbf{k}$ και για την κλειστή επιφάνεια S , που ορίζεται από τις επιφάνειες : x=0 , y=0 , z=0 , x=2 και $y^2+z^2=9$ με $x,y,z\geq 0$

3) Να υπολογιστεί το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$ όπου $\mathbf{F}=(z^2-x^2)\mathbf{i}-xy\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ και S η κλειστή επιφάνεια που ορίζεται από τις επιφάνειες x=0 , x=3 , z=0 και $z=2\sqrt{4-y^2}$

4) Να υπολογιστεί η μάζα του τμήματος της επιφάνειας $z=x^2+(y-1)^2$ όπου $0\leq z\leq 1$ αν η πυκνότητα δίνεται από την σχέση $\rho(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4z+1}}$

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 1998

1) Να αποδειχθεί ο νόμος των ημιτόνων με την βοήθεια διανυσμάτων. ***(1)***

2) Έστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ μια διανυσματική συνάρτηση, η οποία παριστάνει την καμπύλη C. Δείξτε ότι ένας μετασχηματισμός της παραμέτρου $t=f(t')$ με αρνητική παράγωγο : $df(t')/dt'<0$ αντιστρέφει την φορά διαγραφής της καμπύλης. Αναφέρατε ένα παράδειγμα. ***(1)***

3) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f(r), που ικανοποιεί την εξίσωση :

$\nabla f=(1/r^5)\mathbf{r}$ και την συνθήκη $f(1)=0$. ***(1,5)***

4) Έστω ότι το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=2000-(x-100)^2-(y-200)^2$. Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια του βουνού με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο α) $P_1(70,180,700)$,β) $P_2(100,200,2000)$ ***(2)***

5) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T f(x,y)dxdy$ όπου T το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει : $0\le 2x/\pi\le y$, $y\le \sin x$ και $f(x,y)=y$. ***(2)***

6) Έστω ότι η θερμοκρασία T(x,y,z) σε κάθε σημείο P(x,y,z) του χώρου R^3 δίνεται από την συνάρτηση $T(x,y,z)=3x^2+2z^2$. Να υπολογιστεί η ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας S : $x^2+z^2=4$, $0\le y\le 2$. ***(1,5)***

7) Να υπολογισθεί η μάζα του υλικού σύρματος που αποτελείται το τόξο AB της κυκλικής έλικας : $\mathbf{r}(t)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j}+\alpha t\,\mathbf{k}$ όπου $A(-R,0,\alpha\pi)$ και $B(R,0,0)$. Δίνεται ότι η γραμμική πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho=x^2+y^2$. ***(1)***

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 1998

1) Να αποδειχθεί ο νόμος των συνημιτόνων με την βοήθεια διανυσμάτων. ***(1)***

2) Έστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ μια διανυσματική συνάρτηση, η οποία παριστάνει την καμπύλη C. Δείξτε ότι ένας μετασχηματισμός της παραμέτρου $t=f(t')$ με αρνητική παράγωγο : $df(t')/dt'<0$ αντιστρέφει την φορά διαγραφής της καμπύλης. Αναφέρατε ένα παράδειγμα.

(1)

3) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f(r), που ικανοποιεί την εξίσωση : $\nabla f(r)=2r^4\mathbf{r}$.

(1,5)

4) Έστω ότι το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=1500-(x-50)^2-(y-30)^2$. Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια του βουνού με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο α) $P_1(20,40,500)$,β) $P_2(50,30,1500)$ ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα : $\int_0^1\int_0^{(\sin^{-1}y)/y} y\cos xy\,dx\,dy$ ***(2)***

6) Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S. ***(1,5)***

7) Να υπολογισθεί η μάζα του υλικού σύρματος που αποτελείται το τόξο ΑΒ της κυκλικής έλικας : $\mathbf{r}(t)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j}+\alpha t\,\mathbf{k}$ όπου $A(-R,0,\alpha\pi)$ και $B(R,0,0)$. Δίνεται ότι η γραμμική πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho=y^2+z^2$. ***(1)***

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1998

1) α) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Stokes ***(0.5)***

β) Ποια η φυσική του σημασία ; ***(0.5)***

2) Να υπολογιστούν τα εμβαδά των μερών της επιφάνειας της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ στα οποία χωρίζεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx. ***(2.5)***

3) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο ενός υλικού ημισφαιρίου ακτίνας R και σταθεράς επιφανειακής πυκνότητας d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο. ***(2)***

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-\dfrac{4x^2-y^2}{2(z-2)}\mathbf{k}$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ(z) ώστε το διανυσματικό πεδίο φ(z)**F** να απορρέει από δυναμικό. Να βρεθεί το δυναμικό αυτό. ***(2.5)***

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\int_C \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου C το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$, που διαγράφεται κατά την θετική φορά, εξαιρουμένου του τμήματος της που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο. ***(2)***

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1998

1) α) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Gauss *(0.5)*

β) Ποια η φυσική του σημασία ; *(0.5)*

2) Δίνεται ο τόρος με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 . Να υπολογιστούν τα εμβαδά των μερών της επιφάνειας του τόρου στα οποία χωρίζεται από τα επίπεδα y=λx και y=μx. *(2.5)*

3) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο της κάτω βάσεως ενός υλικού ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσεως R και ύψος h. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου έχει επιφανειακή πυκνότητα d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο από την παράπλευρη επιφάνεια. *(2)*

4) Να υπολογισθεί η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$ στο σημείο $(1,\sqrt{2},3)$, κατά την διεύθυνση της καμπύλης, η οποία ορίζεται από την τομή των επιφανειών $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ και $z=x^2+y^2$. *(2.5)*

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\iint_T (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dxdy$ όπου το σύνορο της περιοχής T καθορίζεται από τις καμπύλες : y=0 , y=lnx , x=2. *(2)*

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 1999

1) α) Γιατί δεν ορίζεται η αντίστροφη πράξη του εσωτερικού γινομένου; ***(0,5)***

β) Να δειχθεί ότι η κλίση ∇f ενός βαθμωτού πεδίου f έχει την διεύθυνση της μεγίστης μεταβολής του βαθμωτού πεδίου. ***(1)***

2) Να ελεγχθεί εάν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}-(4-2y\sin x)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$ προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο. .

(2)

3) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I=\int_C f(x,y,z)ds$, όπου $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{y+z}$ και C η καμπύλη με εξίσωση : $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{t}\right)^3\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $t\in[1,2]$ ***(1.5)***

4) Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα : $\int_0^3\int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\,dy\,dx$. Αντιστρέψτε την σειρά ολοκληρώσεως του παραπάνω ολοκληρώματος και υπολογίστε το. ***(2)***

5) Βρείτε τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=3x+4y-1$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=4$

(1)

6) Ποιά σχέση συνδέει τα ολοκληρώματα.

$$I_1=\left[\int_\alpha^\beta f(x)dx\right]^2 \quad \text{και} \quad I_2=\int_\alpha^\beta dx\int_x^\beta dy f(x)f(y)$$ ***(2)***

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 1999

1) α) Γιατί δεν ορίζεται η αντίστροφη πράξη του εξωτερικού γινομένου; ***(0,5)***

β) Να δειχθεί ότι η κλίση ∇f ενός βαθμωτού πεδίου f είναι διάνυσμα κάθετο σε κάθε σημείο οποιασδήποτε ισοσταθμικής του επιφάνειας. ***(1)***

1) Να ελεχθεί εάν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(4xy-3x^2z^2)\mathbf{i}+2(x^2+1)\mathbf{j}-(2x^3z+3z^2)\mathbf{k}$ προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο . ***(2)***

1) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου F=xi+yj και C η καμπύλη $r(t)=\cos^3 t i+\sin^3 t j$, $t\in[0,2\pi]$. ***(1,5)***

4) Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα : $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2\,dydx$. Αντιστρέψτε την σειρά ολοκληρώσεως του παραπάνω ολοκληρώματος και υπολογίστε το. ***(2)***

5) Βρείτε τα ακρότατα της συναρτήσεως f(x,y)= 3x+2y υπό τις συνθήκες $2x^2+3y^2=3$

(1)

4) Να αποδειχθεί η ισότητα :

$$\int_0^{\acute{a}}\left[\int_0^y e^{m(\acute{a}-x))}f(x)dx\right]dy=\int_0^{\acute{a}}(\acute{a}-x)e^{m(\acute{a}-x)}f(x)dx$$

όπου m, α είναι θετικοί σταθεροί αριθμοί. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1999

1) Να δειχθεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ σταθερό μέτρο είναι να είναι κάθετη προς την παράγωγο της *(1)*

2) Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δυο προτάσεων :

α) Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι βάθμωση κάποιου βαθμωτού πεδίου f, δηλ. $\mathbf{F}=\nabla f$.

β) $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου C_1 και C_2είναι δυο οποιεσδήποτε καμπύλες με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία και περιγραφόμενες από τις διανυσματικές συναρτήσεις : $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ αντίστοιχα. *(2)*

3) Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e^{2x}} dy\, x \ln y$. Αντιστρέψτε την σειρά ολοκληρώσεως του παραπάνω ολοκληρώματος και υπολογίστε το. *(1.5)*

4) Να περιγραφεί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange για την εύρεση ακροτάτων υπό συνθήκες. Να εφαρμοστεί για την περίπτωση :

$f(x,y)=x$, $\varphi(x,y)=x^2+2y^2=3$. *(2)*

5) Να ελεγχθεί εάν τα διανυσματικά πεδία

α) $\mathbf{F}=[\sin(yz)+zy\sin(xy)]\mathbf{i}+[xz\cos(yz)+xz\sin(xy)]\mathbf{j}+[xy\cos(yz)-\cos(xy)]\mathbf{k}$

β) $\mathbf{F}=[\exp(yz)+y\exp(x)]\mathbf{i}+[xz\exp(yz)+\exp(x)]\mathbf{j}+[xy\exp(yz)-\exp(y)]\mathbf{k}$

προέρχονται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο . *(1,5)*

6) Δίνονται οι κύλινδροι $K_1 : x^2+y^2=\alpha^2$ και $K_2 : x^2+z^2=\alpha^2$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου K_2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου K_1. *(2)*

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1999

1) Να δειχθεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ σταθερή διεύθυνση είναι να είναι παράλληλη προς την παράγωγο της ***(1)***

2) Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δυο προτάσεων :

α) Το διανυσματικό πεδίο **F** είναι βάθμωση κάποιου βαθμωτού πεδίου f, δηλ. $\mathbf{F}=\nabla f$.

β) $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου C_1 και C_2είναι δυο οποιεσδήποτε καμπύλες με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία και περιγραφόμενες από τις διανυσματικές συναρτήσεις : $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ αντίστοιχα. ***(2)***

3) Δίνεται το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e^{2x}} dy\, x \ln y$. Αντιστρέψτε την σειρά ολοκληρώσεως του παραπάνω ολοκληρώματος και υπολογίστε το. ***(1.5)***

4) Να περιγραφεί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange για την εύρεση ακροτάτων υπό συνθήκες. Να εφαρμοστεί για την περίπτωση :
$f(x,y)=xy$, $\varphi(x,y)=x+y=1$. ***(2)***

5) Να ελεγχθεί εάν τα διανυσματικά πεδία

α) $\mathbf{F}=[\sin(yz)+z\sin(xy)]\mathbf{i}+[xz\cos(yz)+z\sin(xz)]\mathbf{j}+[xy\cos(yz)-\cos(xy)]\mathbf{k}$

β) $\mathbf{F}=[\exp(yz)+y\exp(x)]\mathbf{i}+[xz\exp(yz)+\exp(x)-z\exp(y)]\mathbf{j}+[xy\exp(yz-\exp(y)]\mathbf{k}$

προέρχονται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο . ***(1,5)***

6) Δίνονται οι κύλινδροι $K_1 : x^2+y^2=\alpha^2$ και $K_2 : x^2+z^2=\alpha^2$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κυλίνδρου K_2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου K_1.

(2)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2000

1) α) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Stokes ***(0.5)***

β) Ποια η φυσική του σημασία ; ***(0.5)***

2) Να υπολογιστούν τα εμβαδά των μερών της επιφάνειας της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ στα οποία χωρίζεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx. ***(2.5)***

3) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο ενός υλικού ημισφαιρίου ακτίνας R και σταθεράς επιφανειακής πυκνότητας d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο. ***(2)***

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-\dfrac{4x^2-y^2}{2(z-2)}\mathbf{k}$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ(z) ώστε το διανυσματικό πεδίο φ(z)**F** να απορρέει από δυναμικό. Να βρεθεί το δυναμικό αυτό. ***(2.5)***

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\int_C \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου C το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$, που διαγράφεται κατά την θετική φορά, εξαιρουμένου του τμήματος της που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο. ***(2)***

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2000

1) α) Να αποδειχθεί ότι η βάθμωση ενός βαθμωτού πεδίου σε ένα σημείο μιας ισοσταθμικής επιφάνειας του πεδίου είναι διάνυσμα κάθετο προς την ισοσταθμική επιφάνεια.

β) Αναφέρατε όλα τα είδη του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Διατυπώστε τους ορισμούς των.

2) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^3 dx \int_0^{1+x^2} xy \; dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια.

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \bullet d\vec{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{\mathbf{F}} = x^2y^2\vec{\mathbf{i}} - xy^3\vec{\mathbf{j}}$ και C η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία O(0,0), A(1,0) και B(1,1) κατά τη φορά OABO.

4A) Οι τοροειδείς συντεταγμένες ρ, θ, φ συνιστούν δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα και συνδέονται με τις καρτεσιανές δια των σχέσεων:

$$x=(R+\rho\sin\theta)\cos\varphi, \qquad y=(R+\rho\sin\theta)\sin\varphi, \qquad z=\rho\cos\theta$$

όπου R θετική σταθερά. Να εκφραστούν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\mathbf{e}}_\rho$, $\vec{\mathbf{e}}_\theta$, $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$, π.χ. $\vec{\mathbf{i}} = f_1(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\rho + f_2(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\theta + f_3(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\varphi$

4B) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=0$, και $z=3$

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2000

1) α) Να αποδειχθεί ότι $\vec{\nabla}^2 f(r) = \dfrac{d^2 f}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$ όπου $r = |\vec{\mathbf{r}}|$

β) Να βρεθεί η συνάρτηση f(r) ώστε $\nabla^2 f(r)=0$

2) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή Τ του επιπέδου ΟΧΥ στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\ln 2} dx \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια.

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{\mathbf{F}}\bullet d\vec{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{\mathbf{F}} = x^2y^2\vec{\mathbf{i}} - xy^3\vec{\mathbf{j}}$ και C η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία Ο(0,0), Α(1,0) και Β(1,1) κατά τη φορά ΟΒΑΟ.

4A) Οι τοροειδείς συντεταγμένες ρ, θ, φ συνιστούν δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα και συνδέονται με τις καρτεσιανές δια των σχέσεων:

$$x=(R+\rho\sin\theta)\cos\varphi, \qquad y=(R+\rho\sin\theta)\sin\varphi, \qquad z=\rho\cos\theta$$

όπου R θετική σταθερά. Να εκφραστούν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\mathbf{e}}_\rho$, $\vec{\mathbf{e}}_\theta$, $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$, π.χ. $\vec{\mathbf{i}} = f_1(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\rho + f_2(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\theta + f_3(\rho,\theta,\varphi)\vec{\mathbf{e}}_\varphi$

4B) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, z=0, και z=3

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2000

1) Να προσδιοριστούν τιμές για τις σταθερές α,β,γ, τέτοιες ώστε η κατευθύνουσα παράγωγος του πεδίου $f(x,y,z) = \alpha xy^2+\beta yz+\gamma z^2x^3$ στο σημείο P(1,2,-1) να έχει μεγίστη τιμή 64 ως προς διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα ΟΧ.

2) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f(r), που ικανοποιεί την εξίσωση : $\nabla f(r)=2r^4\mathbf{r}$ και την συνθήκη f(1)=0.

3) Έστω Τ η περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις : $-\varphi(x)\leq y\leq\varphi(x)$, $\alpha\leq x\leq\beta$, όπου η φ(x) είναι μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [α,β]. Εάν f(x,y) είναι μια συνάρτηση ορισμένη στην περιοχή Τ τέτοια ώστε f(x,y)=-f(x,-y), να δείξετε ότι

$$I=\iint_T f(x,y)dxdy=0$$

4) Εάν Τ η περιοχή που ορίζεται από τον μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$, να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_T f(x,y)dxdy$ όταν $f(x,y)=x^2y^2$

5) Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S.

Καλή Επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2000

1) Να προσδιοριστούν τιμές για τις σταθερές α,β,γ, τέτοιες ώστε η κατευθύνουσα παράγωγος του πεδίου $f(x,y,z) = \alpha xy^2+\beta yz+\gamma z^2x^3$ στο σημείο P(1,2,-1) να έχει μεγίστη τιμή 64 ως προς διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα OY.

2) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f(r), που ικανοποιεί την εξίσωση : $\nabla f=(1/r^5)\mathbf{r}$ και την συνθήκη f(1)=0.

3) Έστω T η περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις : $-\varphi(x)\le y\le\varphi(x)$, $\alpha\le x\le\beta$, όπου η φ(x) είναι μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [α,β]. Εάν f(x,y) είναι μια συνάρτηση ορισμένη στην περιοχή T τέτοια ώστε f(x,y)=-f(x,-y), να δείξετε ότι

$$I=\iint_T f(x,y)dxdy=0$$

4) Εάν T η περιοχή που ορίζεται από τον μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$, να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_T f(x,y)dxdy$ όταν $f(x,y)=x^3y^3$

5) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση : $\mathbf{v}=\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού ανά δευτερόλεπτο διαπερνούν την επιφάνεια S : $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$.

Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2001

1) α) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Stokes ***(0.5)***

β) Ποια η φυσική του σημασία ; ***(0.5)***

2) Να υπολογιστούν τα εμβαδά των μερών της επιφάνειας της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ στα οποία χωρίζεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx. ***(2.5)***

3) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο ενός υλικού ημισφαιρίου ακτίνας R και σταθεράς επιφανειακής πυκνότητας d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο. ***(2)***

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-\dfrac{4x^2-y^2}{2(z-2)}\mathbf{k}$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ(z) ώστε το διανυσματικό πεδίο φ(z)**F** να απορρέει από δυναμικό. Να βρεθεί το δυναμικό αυτό. ***(2.5)***

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\displaystyle\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου C το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$, που διαγράφεται κατά την θετική φορά, εξαιρουμένου του τμήματος της που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2001

1) Αναφέρατε το θεώρημα του Stokes. Γιατί απαιτείται η διαφορισιμότητα του διανυσματικού πεδίου **F**; Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes, (εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος), για το διανυσματικό πεδίο $F=(y^2+z^2)\mathbf{i}+(x^2+z^2)\mathbf{j}+(x^2+y^2)\mathbf{k}$, για την επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση : $z=\sqrt{1-x^2}$ και για την επίπεδη καμπύλη C του επιπέδου OXY, που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=\pm1$, $y=\pm2$. ***(2)***

2) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=(-4y+yx^2)\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** είναι μέγιστο. ***(2,5)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του άνω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$

(2,5)

4) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ημικυκλίου $x^2+y^2=R^2$, $y>0$ χρησιμοποιώντας σαν παράμετρο την κλίση $t=dy/dx$ της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (x,y). ***(1)***

5) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο $P_1(1,1,4)$. ***(1)***

6) Θεωρούμε το βαθμωτό πεδίο $f=x^2+y^2+z^2$ και $z=x^2+y^2$. Ποια είναι η σωστή απάντηση για την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$: α) 2x, β) $2x+4x^3+4xy^2$, γ) 0, δ) Το πρόβλημα δεν είναι καλά διατυπωμένο; Δικαιολογείστε την απάντηση σας ***(1)***

Καλή Επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2001

1) Αναφέρατε το θεώρημα του Gauss. Γιατί απαιτείται η διαφορισιμότητα του διανυσματικού πεδίου **F**; Να επαληθευτεί το θεώρημα του Gauss, (εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος), για το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F} = -\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$ και για το στερεό V που ορίζεται από τις ανισότητες: $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$. ***(2)***

2) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του κάτω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2,5)***

3) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=\dfrac{x^2y}{4}\mathbf{i} + \left(x - \dfrac{xy^2}{9}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2,5)***

4) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ημικυκλίου $x^2+y^2=R^2$, $y>0$ χρησιμοποιώντας σαν παράμετρο το μήκος τόξου s από το σημείο (R,0) στο σημείο (x,y) με φορά αντίστροφη από αυτήν των δεικτών του ορολογίου. ***(1)***

5) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο $P_1(1,-2,13)$. ***(1)***

6) Θεωρούμε το βαθμωτό πεδίο $f=x^2+y^2+z^2$ και $z=x^2+y^2$. Ποια είναι η σωστή απάντηση για την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: α) 2y, β) $2y+4y^3+4yx^2$, γ) 0, δ) Το πρόβλημα δεν είναι καλά διατυπωμένο; Δικαιολογείστε την απάντηση σας ***(1)***

Καλή Επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2001

1) Να υπολογιστεί η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου $f=x^2+y^2-z^2$ στο σημείο $P_0=(1, 2\sqrt{2}, 9/2)$ κατά μήκος της καμπύλης :

$\{ 2z=x^2+y^2 , z=9/2\}$ ***(2)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)=(1+t^2)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(t+t^3)\,\mathbf{k}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή O την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(1,5)***

3) Θεωρούμε τις συναρτήσεις φ(t) και f(x,y,z) τέτοιες ώστε να υπάρχει η φ'(t) και $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Δείξτε ότι για την σύνθετη συνάρτηση

$$F(x,y,z)=\varphi(f(x,y,z))$$

ισχύει ότι $\|\nabla F(x,y,z)\|^2 = 4f(x,y,z)[\varphi'(f(x.y,z)]^2$. ***(2)***

4) Να αποδειχθεί η σχέση: $\displaystyle\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\,dS$ ***(2)***

5) Μια επίπεδη μεταλλική επιφάνεια με σύνορο την έλλειψη $x^2+2y^2=3$ έχει θερμοκρασία που δίνεται από την σχέση T(x,y)=3x+2y. Να βρεθούν τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία της επιφάνειας αυτής καθώς και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους. ***(2,5)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2001

1) Να υπολογιστεί η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου

$f=x^2+y^2-z^2$ στο σημείο ($\sqrt{3}/4$, 1/2 , $3\sqrt{3}/2$) κατά μήκος της καμπύλης :

$\{ x^2+y^2/4+z^2/9=1 \ , \ z=3\sqrt{3}/2 \}$ ***(2)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+(1+t^2)\mathbf{j}+(1-t)\,\mathbf{k}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή Ο την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(1,5)***

3) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται επάνω στην επιφάνεια z=f(x,y). Αν οι x(t) και y(t) είναι οι οριζόντιες συντεταγμένες του σωματιδίου δείξτε ότι η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση

$$E(t)=\frac{1}{2}m\left[\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]$$ ***(2)***

4) Να αποδειχθεί η σχέση: $\oint\!\!\oint_S \mathbf{n}\,dS=\mathbf{0}$ ***(2)***

5) Ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος $x^2+y^2\leq 1$ έχει θερμοκρασία $T(x,y)=x^2+2y^2-x+y$. Να βρεθούν τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία τον δίσκου καθώς και οι αντιστοιχες θερμοκρασίες τους. ***(2,5)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2002

1) Ένα σώμα κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης C σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t)=5\cos t\,\mathbf{i}+7\sin t\,\mathbf{j}+e^{t}\mathbf{k}$$

Εάν την χρονική στιγμή $t=\pi/2$ το σώμα εγκαταλείπει την καμπύλη, να βρεθεί η θέση του την χρονική στιγμή $t=3\pi/2$ ***(1,5)***

2) Δίδεται το δυναμικό πεδίο $\mathbf{F}=\frac{-y}{r^2}\mathbf{i}+\frac{x}{r^2}\mathbf{j}$ με $r^2=x^2+y^2$.

Α) Ελέγξτε εάν το **F** είναι συντηρητικό.

Β) Να αποδειχθεί ότι το έργο $W=\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ κατά μήκος του κύκλου C με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ ισούται με 2π.

Υπάρχει αντίφαση μεταξύ των προτάσεων Α) και Β); ***(2)***

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$ που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο και μεταξύ των επιπέδων $z=\alpha x$, $z=\beta x$ με $0<\alpha<\beta$

(2)

4) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση: $\mathbf{v}=(0,y,0)$. Σχεδιάστε τις ταχύτητες των μορίων του ρευστού. Δείξτε ότι το ρευστό δεν είναι ασυμπίεστο. Να βρεθεί ο όγκος την χρονική στιγμή $t=1$, που καταλαμβάνουν τα μόρια του ρευστού τα οποία την χρονική στιγμή $t=0$ πληρούσαν τον κύβο που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

(2,5)

5) Να υπολογιστεί ο όγκος του κυλίνδρου με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha y$ με $\alpha>0$, που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 2002

1) Ένα σώμα κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης C σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t)=5t\mathbf{i}-7\sin t\,\mathbf{j}+\cos t\,\mathbf{k}$$

Εάν την χρονική στιγμή $t=\pi/2$ το σώμα εγκαταλείπει την καμπύλη, να βρεθεί η θέση του την χρονική στιγμή $t=3\pi/2$ ***(1,5)***

2) Δίδεται το δυναμικό πεδίο $\mathbf{F}=\dfrac{\partial(\ln r)}{\partial y}\mathbf{i}-\dfrac{\partial(\ln r)}{\partial x}\mathbf{j}$ με $r=\sqrt{x^2+y^2}$

A) Ελέγξτε εάν το **F** είναι συντηρητικό.

B) Να αποδειχθεί ότι το έργο $W = \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ κατά μήκος του κύκλου C με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ ισούται με -2π.

Υπάρχει αντίφαση μεταξύ των προτάσεων A) και B); ***(2)***

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=4$ που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο και μεταξύ των επιπέδων $z=\alpha y$, $z=\beta y$ με $0<\alpha<\beta$

(2)

4) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση: $\mathbf{v}=(0,0,z)$. Σχεδιάστε τις ταχύτητες των μορίων του ρευστού. Δείξτε ότι το ρευστό δεν είναι ασυμπίεστο. Να βρεθεί ο όγκος την χρονική στιγμή $t=1$, που καταλαμβάνουν τα μόρια του ρευστού τα οποία την χρονική στιγμή $t=0$ πληρούσαν τον κύβο που ορίζεται από τις εξισώσεις $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

(2,5)

5) Να υπολογιστεί ο όγκος του κυλίνδρου με εξίσωση $x^2+y^2=\beta x$ με $\beta>0$, που βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\beta^2$. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002

(Επαναληπτική του Ιουνίου)

1) Η ταχύτητα του νερού ενός ποταμού είναι 20km/h. Μια βάρκα διασχίζει το ποτάμι με ταχύτητα 20km/h ως προς το νερό του ποταμού. Ποια είναι η διεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί η βάρκα και ποια είναι η ταχύτητα της ως προς την κοίτη του ποταμού; Είναι δυνατό η βάρκα να διασχίσει το ποτάμι κάθετα;

(1)

2) Έστω Α ένα σταθερό σημείο στο επίπεδο ΟΧΥ και Β, Γ δυο άλλα σημεία, τα οποία κινούνται έτσι ώστε |ΑΒ|=3 και |ΒΓ|=2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Γ.

(1,5)

3) Έστω $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ μια διανυσματική συνάρτηση, η οποία παριστάνει την καμπύλη C. Δείξτε ότι ένας μετασχηματισμός της παραμέτρου $t=f(t')$ με αρνητική παράγωγο : $df(t')/dt'<0$ αντιστρέφει την φορά διαγραφής της καμπύλης. ***(2)***

4) Εάν η $z=f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημείο $P_0(x_0,y_0)$ ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς;

α) Εάν **u** είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η παράγωγος της f στη διεύθυνση του **u** είναι $(f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j})\cdot\mathbf{u}$.

β) Η κατευθύνουσα παράγωγος της f ως προς την διεύθυνση του **u** είναι διάνυσμα.

γ) Η κατευθύνουσα παράγωγος της f στο P_0 έχει μέγιστο στην διεύθυνση της ∇f.

δ) Στο σημείο (x_0,y_0), η βάθμωση ∇f είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x,y)=f(x_0,y_0)$. ***(1,5)***

5) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και C η καμπύλη : α) $\mathbf{r}(t)=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{k}$, $t\in[0,2\pi]$, β) $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+3t\mathbf{j}+2t^3\mathbf{k}$, $t\in[-1,2]$

(2)

6) Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τα ακρότατα υπό τις συνθήκες που δίνονται

1) $f(x,y)=3x+4y-1$, $x^2+y^2=4$ 2) $f(x,y)=x$, $x^2+2y^2=3$ ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

B

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002

(Επαναληπτική του Ιουνίου)

1) Ένα αεροπλάνο κινείται βορειοδυτικά με ταχύτητα 250miles/h ως προς το έδαφος. Η ταχύτητα του ανέμου είναι 80miles/h με διεύθυνση ανατολική. Ποια θα ήταν η ταχύτητα του αεροπλάνου εάν η ταχύτητα του ανέμου ήταν μηδέν; (1)

2) Έστω Α ένα σταθερό σημείο στο επίπεδο ΟΧΥ και Β, Γ δυο άλλα σημεία, τα οποία κινούνται έτσι ώστε |ΑΒ|=3 και |ΒΓ|=2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Γ, εάν το σημείο Β κινείται στο επίπεδο ΟΧΥ έτσι ώστε |ΑΒ|=3 και το Γ κινείται στο χώρο ενώ |ΒΓ|=2. ***(1,5)***

3) Έστω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $P_1(2,3,1)$ και $P_2(5,7,9)$. Θεωρείστε ένα σωμάτιο, το οποίο κινείται επί του ευθυγράμμου τμήματος ταλαντευόμενο μεταξύ των σημείων P_1 και P_2. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις αυτής της κίνησης. ***(2)***

4) Εάν η $z=f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημείο $P_0(x_0,y_0)$ ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς;

α) Εάν $\mathbf{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η παράγωγος της f στη διεύθυνση του $\mathbf{u}$ είναι $(f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j})\cdot\mathbf{u}$.

β) Η κατευθύνουσα παράγωγος της f ως προς την διεύθυνση του $\mathbf{u}$ είναι διάνυσμα.

γ) Η κατευθύνουσα παράγωγος της f στο P_0 έχει μέγιστο στην διεύθυνση της ∇f.

δ) Στο σημείο (x_0,y_0), η βάθμωση ∇f είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x,y)=f(x_0,y_0)$. ***(1,5)***

5) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και C η καμπύλη : α) $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $t\in[0,1]$ β) $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$, $t\in[0,2\pi]$ ***(2)***

6) Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τα ακρότατα υπό τις συνθήκες που δίνονται 1) $f(x,y)=3x+2y$, $2x^2+3y^2=3$ 2) $f(x,y)=xy$, $x+y=1$ ***(2)***

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002

1) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο $P_1(1,1,4)$. ***(1,5)***

2) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I=\int_0^3 dx\int_0^{1+x^2} xy\ dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{\mathbf{F}}\bullet d\vec{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{\mathbf{F}}=x^2y^2\vec{\mathbf{i}}-xy^3\vec{\mathbf{j}}$ και C η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία O(0,0), A(1,0) και B(1,1) κατά τη φορά OABO. ***(1,5)***

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=0$, και $z=3$ ***(2,5)***

5) Μια επίπεδη μεταλλική επιφάνεια με σύνορο την έλλειψη $x^2+2y^2=3$ έχει θερμοκρασία που δίνεται από την σχέση $T(x,y)=3x+2y$. Να βρεθούν τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία της επιφάνειας αυτής καθώς και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους. ***(2,5)***

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2002

1) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο $P_1(1,-2,13)$. ***(1,5)***

2) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\ln 2} dx \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \bullet d\vec{\mathbf{r}}$ όπου $\vec{\mathbf{F}} = x^2y^2\vec{\mathbf{i}} - xy^3\vec{\mathbf{j}}$ και C η περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα σημεία O(0,0), A(1,0) και B(1,1) κατά τη φορά OBAO. ***(1,5)***

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=0$, και $z=3$ ***(2,5)***

5) Ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος $x^2+y^2\leq 1$ έχει θερμοκρασία $T(x,y)=x^2+2y^2-x+y$. Να βρεθούν τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία τον δίσκου καθώς και οι αντιτστοιχες θερμοκρασίες τους. ***(2,5)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2003

1) α) Να διατυπωθεί το θεώρημα του Stokes ***(0.5)***

β) Ποια η φυσική του σημασία ; ***(0.5)***

2) Να υπολογιστούν τα εμβαδά των μερών της επιφάνειας της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$ στα οποία χωρίζεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx. ***(2.5)***

3) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο ενός υλικού ημισφαιρίου ακτίνας R και σταθεράς επιφανειακής πυκνότητας d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο. ***(2)***

4) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-\frac{4x^2-y^2}{2(z-2)}\mathbf{k}$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση φ(z) ώστε το διανυσματικό πεδίο φ(z)**F** να απορρέει από δυναμικό. Να βρεθεί το δυναμικό αυτό. ***(2.5)***

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου C το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$, που διαγράφεται κατά την θετική φορά, εξαιρουμένου του τμήματος της που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2003

1) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z=-1$ και $z=2$. ***(2)***

2) Η παράγωγος του βαθμωτού πεδίου $f(x,y,z)$ σ' ένα δεδομένο σημείο P είναι μεγίστη στην διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Στην διεύθυνση αυτή η τιμή της παραγώγου είναι $2\sqrt{3}$. α) Να βρεθεί η κλίση του f στο P. β) Να βρεθεί η κατευθύνουσα παράγωγος του f στο P ως προς την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{i}+\mathbf{j}$. ***(2)***

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z=\alpha$ και $z=\beta$ με $0<\beta<\alpha$ όταν $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$ ***(2)***

4) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του άνω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2,5)***

5) Να ελέγχθη εάν το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}=[\sin(xy)+xy\cos(xy)]\mathbf{i}+[x^2\cos(xy)+1]\mathbf{j}$$

προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου $f(x,y)$. Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο . ***(1,5)***

Καλή επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ $\boxed{\text{B}}$

Εξετάσεις Ιουνίου 2003

1) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της $z=(x-1)^2+(y-2)^2$ που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων z=1 και z=3. ***(2)***

2) Να υπολογιστεί η μεταβολή του βαθμωτού πεδίου $f(x,y,z)=xe^y+yz$ εάν το σημείο P(x,y,z) μετακινηθεί από το $P_0(2,0,0)$ προς το $P_1(4,1,-2)$ πάνω σε ευθεία, διανύοντας απόσταση Δs=0.1 μονάδες. ***(2)***

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το τμήμα της κωνικής επιφάνειας $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων z=2 και z=1 όταν $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$ ***(2)***

4) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του κάτω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$

(2,5)

5) Να ελέχθη εάν το διανυσματικό πεδίο

$\mathbf{F}=[-y^2\sin(xy)+1)]\mathbf{i}+[\cos(xy)-xy\sin(xy)]\mathbf{j}$

προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο . ***(1,5)***

Καλή επιτυχία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

A

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2003

1) Δίδεται η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=R^2$ και ο κύλινδρος $x^2+y^2=\alpha^2$ με $0<\alpha<R$. Να προσδιοριστεί η ακτίνα του κυλίνδρου α έτσι ώστε το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εκτός</u> του κυλίνδρου να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εντός</u> του κυκλίνδρου. ***(2)***

2) Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης C σύμφωνα με την εξίσωση: $\mathbf{r}_C(t)=t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$. Την χρονική στιγμή $t_0=1$ εγκαταλείπει την καμπύλη και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Να βρεθεί σε ποια απόσταση θα πλησιάσει την επιφάνεια της σφαίρας $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$ κατά την ευθύγραμμη κίνηση του. Η απόσταση d ενός σημείου P_0 με διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r}_0$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $\mathbf{r}_\varepsilon(u)=\mathbf{r}_1+u\mathbf{v}$ δίνεται από τον τύπο: $d=\dfrac{\left|\mathbf{v}\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\right|}{|\mathbf{v}|}$ ***(2)***

3) Να επαληθευτεί το θεώρημα του Gauss για την επιφάνεια S του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα x=-1, x=1, y=-1 , y=1 , z=-1 , z=1, και για το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. ***(2,5)***

4) Εάν $f(\mathbf{r})$ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό μέγεθος, β) διανυσματικό μέγεθος. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας. 1) $\mathrm{grad}(f(\mathbf{r}))$ 2) $\mathrm{div}(f(\mathbf{r}))$ 3) $\mathrm{rot}(f(\mathbf{r}))$ 4) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f(\mathbf{r})))$ 5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f(\mathbf{r})))$ ***(1,5)***

5) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+\lambda^2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\le t\le\pi/2$. Για ποια τιμή του λ το έργο γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο. ***(2)***

Καλή επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2003

1) Δίδεται η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=R^2$ και ο κώνος $x^2+y^2=\lambda z^2$ Να προσδιοριστεί η τιμή της παραμέτρου λ, έτσι ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εκτός</u> του κώνου, να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εντός</u> του κώνου. ***(2)***

2) Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της καμπύλης C σύμφωνα με την εξίσωση: $\mathbf{r}_C(t)=t\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$. Την χρονική στιγμή $t_0=1$ εγκαταλείπει την καμπύλη και συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Να βρεθεί σε ποια απόσταση θα πλησιάσει την επιφάνεια της σφαίρας $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=2$ κατά την ευθύγραμμη κίνηση του. Η απόσταση d ενός σημείου P_0 με διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r}_0$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $\mathbf{r}_\varepsilon(u)=\mathbf{r}_1+u\mathbf{v}$ δίνεται από τον τύπο: $d=\dfrac{\left|\mathbf{v}\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\right|}{|\mathbf{v}|}$ ***(2)***

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για την κλειστή επιφάνεια S, που ορίζεται από το παραβολοειδές $z=4-(x^2+y^2)$ και το επίπεδο OXY, και για το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}=\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. ***(2,5)***

4) Εάν $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι ένα διανυσματικό μέγεθος, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό μέγεθος, β) διανυσματικό μέγεθος. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad($\mathbf{F}(\mathbf{r})$) 2) div($\mathbf{F}(\mathbf{r})$) 3) rot($\mathbf{F}(\mathbf{r})$) 4) grad(rot($\mathbf{F}(\mathbf{r})$))
5) grad(div($\mathbf{F}(\mathbf{r})$)) ***(1,5)***

5) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης $\mathbf{F}=\lambda^2y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\lambda z\mathbf{k}$ κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\le t\le\pi/2$. Για ποια τιμή του λ το έργο γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο. ***(2)***

Καλή επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2004

1) Οι εξισώσεις κίνησης δυο υλικών σημείων Α και Β είναι:

$$\mathbf{r}_A = \left(e^{t-2} + 2\right)\mathbf{i} + \left(t-2\right)^2 \mathbf{j} + \left(t-1\right)\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_B = \left(2t-1\right)\mathbf{i} + \frac{3}{2}\left(t-2\right)^2 \mathbf{j} + \left(3t-5\right)\mathbf{k} \text{ με } t\geq 0$$

Να εξετασθεί εάν τα υλικά αυτά σημεία θα συγκρουσθούν. Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το σημείο σύγκρουσης και η γωνία των ταχυτήτων κατά τη στιγμή της σύγκρουσης.

(1)

2) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f=f(x,y,z) για το οποίο ισχύει

$$\vec{\nabla} f = 3r^5 \vec{\mathbf{r}} \quad \text{με} \quad \vec{\mathbf{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{και} \quad r = |\vec{\mathbf{r}}|$$ ***(1,5)***

3) Εάν $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ είναι ένα σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο, δηλ. $\vec{\nabla}\bullet\mathbf{F} = 0$, του οποίου οι δυο πρώτες συνιστώσες είναι $F_1=x^2yz$, $F_2=zy+y^2$, να βρεθεί η τρίτη συνιστώσα F_3.

(1,5)

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(y^2+ze^{xz})\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}+xe^{xz}\mathbf{k}$ και C η καμπύλη με εξίσωση $\mathbf{r}(t)=5\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+3t\,\mathbf{k}$ με $0\leq t\leq \pi/2$ ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2+1$ και $y=2x+6$. ***(2)***

6) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(2x+y)\mathbf{i}+(x^2+y)\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$ και S το τμήμα της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου $x^2+y^2=4$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων z=0 και z=5.

Καλή επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2004

1) Οι εξισώσεις κίνησης δυο υλικών σημείων A και B είναι:

$$\mathbf{r}_A = \left(t^2-2\right)\mathbf{i} + \left(\ln t + 2\right)\mathbf{j} + \left(t+3\right)\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}_B = \left(-3t+2\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \left(2t^2+2\right)\mathbf{k} \text{ με } t \geq 0$$

Να εξετασθεί εάν τα υλικά αυτά σημεία θα συγκρουσθούν. Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το σημείο σύγκρουσης και η γωνία των ταχυτήτων κατά τη στιγμή της σύγκρουσης. ***(1)***

2) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο f=f(x,y,z) για το οποίο ισχύει

$$\vec{\nabla} f = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3} \quad \text{με} \quad \vec{\mathbf{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{και} \quad r = |\vec{\mathbf{r}}| \qquad \textit{(1,5)}$$

3) Εάν $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ είναι ένα σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο, δηλ. $\vec{\nabla}\bullet\mathbf{F}=0$, του οποίου οι δυο πρώτες συνιστώσες είναι $F_1=x^2+zx$, $F_2=y^2z+x$, να βρεθεί η τρίτη συνιστώσα F_3.

(1,5)

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(6x+y-z\sin(xz))\mathbf{i}+x\mathbf{j}-x\sin(xz)\mathbf{k}$ και C η καμπύλη με εξίσωση $\mathbf{r}(t)=5t\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$ με $0\leq t\leq\sqrt{\pi}$ ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2=x$ και $y^2=6-x$. ***(2)***

6) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(3x+yz)\mathbf{i}+(y-e^z)\mathbf{j}+(3z+2)\mathbf{k}$ και S το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=4$ με $z\geq 0$. ***(2)***

Καλή επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2004

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ με την συνθήκη $x^2+y^2=R^2$. Να εξετασθεί η περίπτωση όταν $\alpha=\beta=0$ ***(2)***

2) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I=\iint_S f(x,y,z)\,dS$ όπου $f=\frac{1}{r}$ και S η επιφάνεια της σφαίρας που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. ***(2)***

3) Εάν $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ είναι ένα σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο, δηλ. $\vec{\nabla}\bullet\mathbf{F}=0$, του οποίου οι δυο πρώτες συνιστώσες είναι $F_1=x^2yz$, $F_2=zy+y^2$, να βρεθεί η τρίτη συνιστώσα F_3. ***(2)***

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(y^2+ze^{xz})\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}+xe^{xz}\mathbf{k}$ και C η καμπύλη με εξίσωση $\mathbf{r}(t)=5\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+3t\,\mathbf{k}$ με $0\le t\le \pi/2$ ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y=x^2+1$ και $y=2x+6$. ***(2)***

Καλή επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2004

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f=x^2+y^2$ με την συνθήκη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να εξετασθεί η περίπτωση $\alpha=\beta$. ***(2)***

2) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I=\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}$ όπου $\mathbf{F}=\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ και S η επιφάνεια της σφαίρας που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. ***(2)***

3) Εάν $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ είναι ένα σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο, δηλ. $\vec{\nabla}\bullet\mathbf{F}=0$, του οποίου οι δυο πρώτες συνιστώσες είναι $F_1=x^2+zx$, $F_2=y^2z+x$, να βρεθεί η τρίτη συνιστώσα F_3.

(2)

4) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ όπου $\mathbf{F}=(6x+y-z\sin(xz))\mathbf{i}+x\mathbf{j}-x\sin(xz)\mathbf{k}$ και C η καμπύλη με εξίσωση $\mathbf{r}(t)=5t\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$ με $0\le t\le\sqrt{\pi}$ ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις καμπύλες $y^2=x$ και $y^2=6-x$. ***(2)***

Καλή επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2005

1) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_T \exp(x^2)dxdy$ όπου T η εσωτερική περιοχή του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0,0), (1,0), (1,1).

2) Προσδιορίστε την ελαχίστη απόσταση του σημείου (2,1) από τα σημεία της παραβολής $y^2=4x$ με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

3) Θεωρούμε την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=R^2$ και τα επίπεδα y=αx και y=βx με 0<α<β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων και που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο, (x, y, z≥0).

4) Να ελεγχθεί εάν τα διανυσματικά πεδία

α) $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ β) $\mathbf{F}=yz^2\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+xy^2\mathbf{k}$

προέρχονται από την κλίση ενός βαθμωτού πεδίου. Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο.

5) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο $P_1(1,1,4)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή Επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2005

1) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T \sin(x^2)dxdy$ όπου T η εσωτερική περιοχή του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0,0), $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},1\right)$.

2) Προσδιορίστε την ελαχίστη απόσταση του σημείου (-2,1) από τα σημεία της παραβολής $y^2=-4x$ με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

3) Δίνεται ο κύλινδρος $x^2+y^2=R^2$ με $2\le z\le 5$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου που αποκόπτεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx και που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο, $(x,y,z\ge 0)$

4) Να ελεγχθεί εάν τα διανυσματικά πεδία
α) $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ β) $\mathbf{F}=yz^2\mathbf{i}+x^2z\mathbf{j}+xy^2\mathbf{k}$
προέρχονται από την κλίση ενός βαθμωτού πεδίου. Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο.

5) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=z(x,y)=500-3x^2-6y^2$ (σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη αναρρίχηση από το σημείο P(2,8,104);

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή Επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005

1) Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$ ***(1)***

2) Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα δίνουν α) εμβαδόν επίπεδης περιοχής β) εμβαδόν επιφάνειας γ) όγκο στερεού δ) μήκος καμπύλης

$$\iint_T dxdy,\quad \iint_T 3dxdy,\quad \iint_T \left(x^2+y^2\right)dxdy,\quad \iint_S dS,\quad \iint_S 3dS,\quad \iint_S \left(x^2+y^2\right)dS$$

$$\iiint_V dxdydz,\quad \iiint_V 3dxdydz,\quad \iiint_V \left(x+y+z\right)dxdydz,\quad \int_{\widehat{AB}} ds,\quad \int_{\widehat{AB}} \left(x^2+y^2\right)ds,$$

όπου T επίπεδη επιφάνεια του επιπέδου OXY, S τμήμα επιφάνειας, V στερεό, $\widehat{AB}$ τόξο καμπύλης με άκρα τα σημεία A, B. ***(1)***

3) Δίνεται ο κύλινδρος $x^2+y^2=R^2$ με $2\le z\le 5$. Να υπολογιστεί ο όγκος του μέρους του κυλίνδρου που αποκόπτεται από τα επίπεδα $y=\alpha x$ και $y=\beta x$ και που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο, $(x,y,z\ge 0)$. ***(2)***

4) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=z(x,y)=500-3x^2-6y^2$ (σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη αναρρίχηση από το σημείο P(2,8,104) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+\lambda^2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\le t\le \pi/2$. Για ποια τιμή του λ το έργο γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο. ***(2)***

6) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+(1+t^2)\mathbf{j}+(1-t)\,\mathbf{k}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή O την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

Καλή Επιτυχία

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005

1) Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5t\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+yxz$

δ) $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-8xy\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x^2+yz+z\mathbf{j}$ ***(1)***

2) Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα δίνουν α) εμβαδόν επίπεδης περιοχής β) εμβαδόν επιφάνειας γ) όγκο στερεού δ) μήκος καμπύλης

$$\iint_T dxdy,\quad \iint_T 3dxdy,\quad \iint_T \left(x^2+y^2\right)dxdy,\quad \iint_S dS,\quad \iint_S 3dS,\quad \iint_S \left(x^2+y^2\right)dS$$

$$\iiint_V dxdydz,\quad \iiint_V 3dxdydz,\quad \iiint_V (x+y+z)dxdydz,\quad \int_{\overset{\frown}{AB}} ds,\quad \int_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2+y^2\right)ds,$$

όπου Τ επίπεδη επιφάνεια του επιπέδου ΟΧΥ, S τμήμα επιφάνειας, V στερεό, $\overset{\frown}{AB}$ τόξο καμπύλης με άκρα τα σημεία Α, Β. ***(1)***

3) Θεωρούμε την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=R^2$ και τα επίπεδα $y=\alpha x$ και $y=\beta x$ με $0<\alpha<\beta$. Να υπολογιστεί ο όγκος του μέρους της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων και που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο, $(x, y, z\geq 0)$. ***(2)***

4) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=z(x,y)=500-3x^2-6y^2$ (σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη αναρρίχηση από το σημείο P(2,8,104) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης $\mathbf{F}=\lambda^2 y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\lambda z\mathbf{k}$ κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\leq t\leq \pi/2$. Για ποια τιμή του λ το έργο γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο. ***(2)***

6) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)=(1+t^2)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(t+t^3)\mathbf{k}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή Ο την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

Καλή Επιτυχία

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2006

(Μεταφερομένη)

1) Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$ ***(1)***

2) Να προσδιοριστούν τιμές για τις σταθερές a,b,c, τέτοιες ώστε η κατευθύνουσα παράγωγος του πεδίου $f(x,y,z) = axy^2+byz+cz^2x^3$ στο σημείο P(1,2,-1) να έχει μεγίστη τιμή 64 ως προς διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα OZ.

(2)

3) Έστω T η περιοχή, η οποία ορίζεται από τις ανισότητες $1\leq x^2+y^2\leq 2$, $y\geq 0$. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T f(x,y)dxdy$ όπου $f(x,y)=1+xy$.

(2)

4) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=z(x,y)=500-3x^2-6y^2$ (σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη αναρρίχηση από το σημείο P(2,8,104) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2,5)***

5) Προσδιορίστε την ελαχίστη απόσταση του σημείου (2,1) από τα σημεία της παραβολής $y^2=4x$ με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange. ***(2,5)***

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2006

(Μεταφερομένη)

1) Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5t\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+yxz$

δ) $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-8xy\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x^2+yz+z\mathbf{j}$ ***(1)***

2) Η παράγωγος του βαθμωτού πεδίου f(x,y,z) σ' ένα δεδομένο σημείο P είναι μεγίστη στην διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$. Στην διεύθυνση αυτή η τιμή της παραγώγου είναι $2\sqrt{3}$. α) Να βρεθεί η κλίση του f στο P. β) Να βρεθεί η κατευθύνουσα παράγωγος του f στο P ως προς την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{i}+\mathbf{j}$. ***(2)***

3) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T f(x,y)dxdy$ όπου T το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει : $0\le 2x/\pi \le y$, $y\le \sin x$ και $f(x,y)=y$. ***(2)***

4) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=f(x,y)=300-x^2-3y^2$(σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη κατάβαση από το σημείο P(10,3,173) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2,5)***

5) Προσδιορίστε την ελαχίστη απόσταση του σημείου (-2,1) από τα σημεία της παραβολής $y^2=-4x$ με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange ***(2,5)***

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006

1) Δώστε τους ορισμούς των παρακάτω μαθηματικών εννοιών:

α) Βαθμωτού πεδίου β) Διανυσματικού πεδίου γ) Διανυσματικής συνάρτησης. Τι μπορούν να παριστάνουν οι παραπάνω μαθηματικές έννοιες από φυσικής πλευράς; Δώστε από ένα παράδειγμα

(1,5)

2) Έστω η επιφάνεια S η οποία ορίζεται από την εξίσωση z=f(x,y) με $(x,y)\in T\subset R^2$. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις δίνουν το εμβαδόν της επιφάνειας S;

α) $\iint_T \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S}$ β) $\iint_T \vec{\nabla} f dS$ γ) $\iint_T d\vec{S}$ δ) $\iint_S dS$

Αιτιολογείστε την απάντηση σας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S που ορίζεται την εξίσωση: $z=f\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ με $T=\left\{\left(x,y\right)\ /\ x^2+y^2\le 9\right\}$

(2)

3) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=z(x,y)=500-3x^2-6y^2$ (σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη αναρρίχηση από το σημείο P(2,8,104) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2)***

4) Να ελεχθεί εάν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(y^2\cos x+z^3)\mathbf{i}-(4-2y\sin x)\mathbf{j}+(3xz^2+2)\mathbf{k}$ προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο. ***(2,5)***

5) Έστω T η περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις : $-\varphi(x)\le y\le\varphi(x)$, $\alpha\le x\le\beta$, όπου η φ(x) είναι μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [α,β]. Εάν f(x,y) είναι μια συνάρτηση ορισμένη στην περιοχή T τέτοια ώστε f(x,y)=-f(x,-y), (περιττή ως προς y), να δείξετε ότι

$$I=\iint_T f(x,y)dxdy=0$$

(2)

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006

1) Δώστε τους ορισμούς των παρακάτω μαθηματικών εννοιών:

α) Βαθμωτού πεδίου β) Διανυσματικού πεδίου γ) Διανυσματικής συνάρτησης. Τι μπορούν να παριστάνουν οι παραπάνω μαθηματικές έννοιες από φυσικής πλευράς; Δώστε από ένα παράδειγμα

(1,5)

2) Έστω η επιφάνεια S η οποία ορίζεται από την εξίσωση z=f(x,y) με $(x,y)\in T\subset R^2$. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις δίνουν το εμβαδόν της επιφάνειας S;

α) $\iint_T \vec{\nabla} f\cdot d\vec{S}$ β) $\iint_T \vec{\nabla} f dS$ γ) $\iint_T d\vec{S}$ δ) $\iint_S dS$

Αιτιολογείστε την απάντηση σας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S που ορίζεται την εξίσωση: $z = f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ με $T = \{(x,y)\ /\ x^2 + y^2 \le 25\}$ ***(2)***

3) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=f(x,y)=300-x^2-3y^2$(σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη κατάβαση από το σημείο P(10,3,173) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2)***

4) Να ελεγχθεί εάν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(4xy-3x^2z^2)\mathbf{i}+2(x^2+1)\mathbf{j}-(2x^3z+3z^2)\mathbf{k}$ προέρχεται από την κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου f(x,y,z). Σε θετική περίπτωση να βρεθεί το βαθμωτό αυτό πεδίο. ***(2,5)***

5) Έστω Τ η περιοχή που ορίζεται από τις σχέσεις : $-g(y)\le x\le g(y)$, $\gamma\le y\le\delta$, όπου η g(y) είναι μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [γ, δ]. Εάν f(x,y) είναι μια συνάρτηση ορισμένη στην περιοχή Τ τέτοια ώστε f(x,y)=-f(-x,y), (περιττή ως προς x), να δείξετε ότι

$$I = \iint_T f(x,y)dxdy = 0$$

(2)

A

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Εξετάσεις Ιουνίου 2007

1) **Α)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$

Β) Εάν f(**r**) είναι ένα βαθμωτό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad(f(**r**)) 2) div(f(**r**)) 3) rot(f(**r**)) 4) rot(grad(f(**r**)))

5) div(grad(f(**r**))) ***(1,5)***

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις παραβολές: $y=4-x^2$, $y=1-x^2/4$. ***(2)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του άνω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2,5)***

4) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης:

$$\mathbf{r}(t)=(1+t^2)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(t+t^3)\,\mathbf{k}.$$

Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή Ο την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

5) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=(-4y+yx^2)\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2)***

B

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2007

1) **Α)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5t\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+yxz$

δ) $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-8xy\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x^2+yz+z\mathbf{j}$

Β) Εάν **F**(**r**) είναι ένα διανυσματικό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad(**F**(**r**)) 2) div(**F**(**r**)) 3) rot(**F**(**r**)) 4) grad(rot(**F**(**r**)))

5) grad(div(**F**(**r**))) ***(1,5)***

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τις παραβολές: $y=x^2-4$, $y=x^2/4-1$. ***(2)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του κάτω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2,5)***

4) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+(1+t^2)\mathbf{j}+(1-t)\,\mathbf{k}.$$

Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή Ο την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

5) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=\dfrac{x^2y}{4}\mathbf{i}+\left(x-\dfrac{xy^2}{9}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2007

A

1) Το ύψος h σε χιλιόμετρα ενός βουνού δίνεται από την σχέση: $h = 2 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

Ένας ορειβάτης βρίσκεται στο σημείο (1, 1, 3/4) του βουνού. A) Ποια διεύθυνση πρέπει να ακολουθήσει για να έχει την μεγίστη δυνατή κατάβαση. B) Εάν ο ορειβάτης κινηθεί προς την κατεύθυνση του σημείου (-1,3) , θα ανέλθει ή θα κατέβει; Γ) Να βρεθεί η διαδρομή που θα ακολουθήσει ο ορειβάτης με σταθερό υψόμετρο. ***(1,5)***

2) Δίνεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t)=\cos(\pi t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ με $0 \le t \le 4$. A) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (-1,1,1). B) Έστω $f(x,y,z)=x^3-2y-z\exp(xz+1)$. B) Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (-1,1,1) και θέλετε να κινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ως προς ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθείτε έτσι ώστε η τιμή της f να μειώνεται; ***(2)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ με την συνθήκη $x^2+y^2=R^2$. Να εξετασθεί η περίπτωση όταν $\alpha=\beta=0$ ***(2)***

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, $z=0$, και $z=3$. ***(2,5)***

5) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $$I = \int_0^3 dx \int_{y=0}^{y=1+x^2} xy\,dy$$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2007 B

1) Το ύψος h σε χιλιόμετρα ενός βουνού δίνεται από την σχέση: $h = 4 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$.

Ένας ορειβάτης βρίσκεται στο σημείο (2, 1, 1) του βουνού. Α) Ποια διεύθυνση πρέπει να ακολουθήσει για να έχει την μέγιστη δυνατή ανάβαση. Β) Εάν ο ορειβάτης κινηθεί προς την κατεύθυνση του σημείου (3,-1) , θα ανέλθει ή θα κατέβει; Γ) Να βρεθεί η διαδρομή που θα ακολουθήσει ο ορειβάτης με σταθερό υψόμετρο. ***(1,5)***

2) Δίνεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\cos(\pi t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ με $0 \le t \le 4$. Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (1,-1,1). Β) Έστω $f(x,y,z)=y^3-2x-z\exp(yz+1)$. Β) Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (1,-1,1) και θέλετε να κινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ως προς ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθείτε έτσι ώστε η τιμή της f να αυξάνεται; ***(2)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f=x^2+y^2$ με την συνθήκη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.
Να εξετασθεί η περίπτωση α=β. ***(2)***

4) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}-2y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ και για την επιφάνεια S που ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2+y^2=4$, z=0, και z=3 ***(2,5)***

5) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\ln 2} dx \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

A

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2011

1) Έστω ότι το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση

$$z=2000-(x-100)2-(y-200)2 .$$

Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια του βουνού με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο α) $P_1(70,180,700)$, β) $P_2(100,200,2000)$.

2) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T f(x,y)dxdy$ όπου T το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει : $0\le 2x/\pi \le y$, $y\le \sin x$ και $f(x,y)=y$.

3) Έστω ότι η θερμοκρασία $T(x,y,z)$ σε κάθε σημείο $P(x,y,z)$ του χώρου R^3 δίνεται από την συνάρτηση $T(x,y,z)=3x^2+2z^2$. Να υπολογιστεί η ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας $S : x^2+z^2=4$, $0\le y\le 2$.

4) Να υπολογισθεί η μάζα του υλικού σύρματος που αποτελείται από το τόξο AB της κυκλικής έλικας : $\mathbf{r}(t)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j}+\alpha t\,\mathbf{k}$ όπου $A(-R,0,\alpha\pi)$ και $B(R,0,0)$. Δίνεται ότι η γραμμική πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho=x^2+y^2$.

5) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη : $z=0$, $y=x^2$ και γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία : $2x-y+z=0$, $2x+5y-z-4=0$.

B

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2011

1) Έστω ότι το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση

$$z=1500-(x-50)^2-(y-30)^2 .$$

Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια του βουνού με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο α) $P_1(20,40,500)$, β) $P_2(50,30,1500)$.

2) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα : $\int_0^1\int_0^{\left(\sin^{-1}y\right)/y} y\cos xy\,dx\,dy$

3) Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S.

4) Να υπολογισθεί η μάζα του υλικού σύρματος που αποτελείται το τόξο AB της κυκλικής έλικας : $\mathbf{r}(t)=R\cos t\,\mathbf{i}+R\sin t\,\mathbf{j}+\alpha t\,\mathbf{k}$ όπου $A(-R,0,\alpha\pi)$ και $B(R,0,0)$. Δίνεται ότι η γραμμική πυκνότητα του σύρματος είναι $\rho=y^2+z^2$.

5) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη : $xy=1$, $z=0$ και γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(2,3,4)$ και $B(3,4,5)$

A

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2011

1) **A)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$

B) Εάν f(**r**) είναι ένα βαθμωτό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad(f(**r**)) 2) div(f(**r**)) 3) rot(f(**r**)) 4) rot(grad(f(**r**)))

5) div(grad(f(**r**))) ***(1,5)***

2) Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t)=\alpha\cos t\,\mathbf{i}+\beta\sin t\,\mathbf{j}+(\cos t+\gamma)\mathbf{k}$ είναι επίπεδη. Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου. ***(2,5)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του άνω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$. ***(2)***

4) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης:

$\mathbf{r}(t)=(1+t^2)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(t+t^3)\,\mathbf{k}$. Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή O την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

5). Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S. ***(2)***

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2011

B

1) **A)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5t\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+yxz$

δ) $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-8xy\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x^2+yz+z\mathbf{j}$

B) Εάν $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) $\text{grad}(\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ 2) $\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ 3) $\text{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{r}))$ 4) $\text{grad}(\text{rot}(\mathbf{F}(\mathbf{r})))$

5) $\text{grad}(\text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{r})))$ ***(1,5)***

2) Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t)=\alpha\sin t\mathbf{i}+\beta\cos\mathbf{j}+(\sin t+\gamma)\mathbf{k}$ είναι επίπεδη. Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου. ***(2,5)***

3) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του κάτω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2)***

4) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+(1+t^2)\mathbf{j}+(1-t)\,\mathbf{k}$**.** Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από την αρχή O την στιγμή t=1; Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(2)***

5) Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το κάτω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S. ***(2)***

A

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

1) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(1,5)***

2) Δίδεται η καμπύλη Κ του επιπέδου ΟΧΥ με εξίσωση $f\left(x, y\right) = 0$ με $a \le x \le b$. Ποια είναι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται εάν η καμπύλη περιστραφεί
α) γύρω από τον άξονα ΟΧ,
β) γύρω από τον άξονα ΟΥ.
γ) Εάν η καμπύλη περιστραφεί γύρω από τον άξονα ΟΖ περιγράψτε γεωμετρικά το σχήμα της επιφάνειας που θα δημιουργηθεί.
Εφαρμόστε τα ανωτέρω για την καμπύλη $f\left(x, y\right) = y - x^2 = 0$ με $1 \le x \le 3$ ***(2)***

3) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x+2y-αz)**i**+(βx-3y)**j**+(4x-γy+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, γ$\in$R έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο A(0,-1,2) στο σημείο B(-2,1,0). ***(2)***

4) Έστω ότι η θερμοκρασία T(x,y,z) σε κάθε σημείο P(x,y,z) του χώρου R^3 δίνεται από την συνάρτηση T(x,y,z)=$3x^2+3z^2$. Να υπολογιστεί η ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας S: $x^2+z^2=4$, $0\le y\le 2$. ***(2)***

5) Δίδεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\mathbf{i} + y\left(t\right)\mathbf{j} + z\left(t\right)\mathbf{k}$ και το επίπεδο Π με εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$. Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της προβολής της καμπύλης στο επίπεδο Π. ***(2,5)***

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

B

1) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(1,5)***

2) Δίδεται η καμπύλη Κ του επιπέδου ΟΧΥ με εξίσωση $f\left(x, y\right)=0$ με $a \leq x \leq b$. Ποια είναι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται εάν η καμπύλη περιστραφεί
α) γύρω από τον άξονα ΟΧ,
β) γύρω από τον άξονα ΟΥ.
γ) Εάν η καμπύλη περιστραφεί γύρω από τον άξονα ΟΖ περιγράψτε γεωμετρικά το σχήμα της επιφάνειας που θα δημιουργηθεί.
Εφαρμόστε τα ανωτέρω για την καμπύλη $f\left(x, y\right)=y-x^3=0$ με $1 \leq x \leq 3$ ***(2)***

3) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x-αy-z)**i**+(βx-y+αz)**j**+(γx-2y+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο Α(1,1,1) στο σημείο Β(-2,2,1). ***(2)***

4) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση: **v**=**i**+x**j**+z**k**, (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού ανά δευτερόλεπτο διαπερνούν την επιφάνεια S: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$. ***(2)***

5) Δίδεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}\left(t\right)=x\left(t\right)\mathbf{i}+y\left(t\right)\mathbf{j}+z\left(t\right)\mathbf{k}$ και το επίπεδο Π με εξίσωση $Ax+By+Cz+D=0$. Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της προβολής της καμπύλης στο επίπεδο Π. ***(2,5)***

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Νοεμβρίου 2011
(για τους επί πτυχίω)

1) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P(x_0, y_0 z_0)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(2)***

2) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x+2y-αz)**i**+(βx-3y)**j**+(4x-γy+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο A(0,-1,2) στο σημείο B(-2,1,0). ***(2,5)***

3) Έστω ότι η θερμοκρασία T(x,y,z) σε κάθε σημείο P(x,y,z) του χώρου R^3 δίνεται από την συνάρτηση $T(x,y,z)=3x^2+3z^2$. Να υπολογιστεί η ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας S: $x^2+z^2=4$, $0\le y\le 2$. ***(2,5)***

4) Δίδεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ και το επίπεδο Π με εξίσωση $Ax+By+Cz+D=0$. Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της προβολής της καμπύλης στο επίπεδο Π. ***(3)***

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2012
(για τους επί πτυχίω)

1) Για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ και την επιφάνεια S

$x^2+y^2+z^2=1$ με $z \geq 0$ να υπολογίσετε:

α) το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}dS$

β) το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C το σύνορο της S.

Τα αποτελέσματα είναι συμβατά με το θεώρημα του Stokes; ***(2)***

2) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. ***(2,5)***

3) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ στο σημείο (2, 5) παίρνει την τιμή $f(2,5)=7$ και οι μερικές παράγωγοι τις τιμές $f_x(2, 5)=3$, $f_y(2, 5)=1$. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή της στα σημεία (2.2, 5.1) και (1.9, 5.2). ***(2)***

4) Δίνεται η ευθεία (ε) σαν τομή των επιπέδων:
(Π_1): $4x-3y+8z-5=0$, (Π_2): $-3x+2y-3z-1=0$
Να βρεθεί η απόσταση d=OA της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε) και η εξίσωση της ευθείας (η) που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα OA. ***(2,5)***

5) Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τα κρίσιμα σημεία και ελέγξτε εάν είναι τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία.:
α) $f(x,y)=e^x\cos y$ β) $f(x,y)=x\sin y$ ***(1)***

A

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2012

1) **Α)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+5t\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+yxz$

δ) $\mathbf{F}=3\mathbf{i}-8xy\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x^2+yz+z\mathbf{j}$

Β) Εάν **F**(**r**) είναι ένα διανυσματικό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.
1) grad(**F**(**r**)) 2) div(**F**(**r**)) 3) rot(**F**(**r**)) 4) grad(rot(**F**(**r**))) 5) grad(div(**F**(**r**))) ***(1,5)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(1,5)***

3) Είναι γνωστό ότι για τυχαίες συναρτήσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, η διανυσματική παραμετρική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)+z(t)\mathbf{k}$ παριστάνει καμπύλη στο χώρο. Δοθέντος του επιπέδου $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$, να βρεθεί η σχέση, που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, ώστε η αντίστοιχη καμπύλη να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο. Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. ***(2,5)***

4) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=(-4y+yx^2)\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο.
(2)

5) Α) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζουμε την καρτεσιανή εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας. Β) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη: $z=0$, $y=x^2$ και γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία : $2x-y+z=0$, $2x+5y-z-4=0$.
(2,5)

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2012

B

1) **Α)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$

Β) Εάν f(**r**) είναι ένα βαθμωτό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad(f(**r**)) 2) div(f(**r**)) 3) rot(f(**r**)) 4) rot(grad(f(**r**))) 5) div(grad(f(**r**))) ***(1,5)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(1,5)***

3) Είναι γνωστό ότι για τυχαίες συναρτήσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, η διανυσματική παραμετρική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)+z(t)\mathbf{k}$ παριστάνει καμπύλη στο χώρο. Δοθέντος του επιπέδου Αx+Βy+Γz+Δ=0, να βρεθεί η σχέση, που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, ώστε η αντίστοιχη καμπύλη να βρίσκεται πάνω στο επίπεδο. Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. ***(2,5)***

4) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=\frac{x^2y}{4}\mathbf{i}+\left(x-\frac{xy^2}{9}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2)***

5) Α) Περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζουμε την καρτεσιανή εξίσωση μιας κυλινδρικής επιφάνειας. Β) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη : xy=1, z=0 και γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α(2,3,4) και Β(3,4,5)

(2,5)

A

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2012

1) Α) Δώστε τους ορισμούς των παρακάτω μαθηματικών εννοιών:

α) Βαθμωτού πεδίου β) Διανυσματικού πεδίου γ) Διανυσματικής συνάρτησης. Τι μπορούν να παριστάνουν οι παραπάνω μαθηματικές έννοιες από φυσικής πλευράς; Δώστε από ένα παράδειγμα

Β) Έστω η επιφάνεια S η οποία ορίζεται από την εξίσωση $z=f(x,y)$ με $(x,y)\in T\subset R^2$. Τι παριστούν οι παρακάτω εκφράσεις και ποιά δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας S;

α) $\iint\limits_T \vec{\nabla} f\cdot d\vec{S}$ β) $\iint\limits_T \vec{\nabla} f dS$ γ) $\iint\limits_T d\vec{S}$ δ) $\iint\limits_S dS$

Αιτιολογείστε την απάντηση σας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S που ορίζεται την εξίσωση: $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ με $T=\{(x,y)\ /\ x^2+y^2\le 9\}$ *(2)*

2) Δίνεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t)=\cos(\pi t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ με $0\le t\le 4$. Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (-1,1,1).

Β) Έστω $f(x,y,z)=x^3-2y-z\exp(xz+1)$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (-1,1,1) και θέλετε να κινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ως προς ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθείτε έτσι ώστε η τιμή της f να μειώνεται; *(2)*

3) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $$I=\int_0^3 dx\int_{y=0}^{y=1+x^2} xy\,dy$$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. *(2)*

4) Δίδεται η καμπύλη K του επιπέδου OXY με εξίσωση $f(x,y)=0$ με $a\le x\le b$. Ποια είναι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται εάν η καμπύλη περιστραφεί

α) γύρω από τον άξονα OX,

β) γύρω από τον άξονα OY.

γ) Εάν η καμπύλη περιστραφεί γύρω από τον άξονα OZ περιγράψτε γεωμετρικά το σχήμα της επιφάνειας που θα δημιουργηθεί.

Εφαρμόστε τα ανωτέρω για την καμπύλη $f(x,y)=y-x^2=0$ με $1\le x\le 3$ *(2)*

5) Έστω ότι η θερμοκρασία $T(x,y,z)$ σε κάθε σημείο $P(x,y,z)$ του χώρου R^3 δίνεται από την συνάρτηση $T(x,y,z)=3x^2+3z^2$. Να υπολογιστεί η ροή θερμότητας διαμέσου της επιφάνειας S: $x^2+z^2=4$, $0\le y\le 2$. *(2)*

B

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2012

1) Α) Δώστε τους ορισμούς των παρακάτω μαθηματικών εννοιών:
α) Βαθμωτού πεδίου β) Διανυσματικού πεδίου γ) Διανυσματικής συνάρτησης. Τι μπορούν να παριστάνουν οι παραπάνω μαθηματικές έννοιες από φυσικής πλευράς; Δώστε από ένα παράδειγμα

Β) Έστω η επιφάνεια S η οποία ορίζεται από την εξίσωση z=f(x,y) με $(x,y)\in T\subset R^2$. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις δίνουν το εμβαδόν της επιφάνειας S;

α) $\iint_T \vec{\nabla} f \cdot d\vec{S}$ β) $\iint_T \vec{\nabla} f dS$ γ) $\iint_T d\vec{S}$ δ) $\iint_T dS$

Αιτιολογείστε την απάντηση σας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας S που ορίζεται την εξίσωση: $z = f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ με $T = \{(x,y) \ / \ x^2 + y^2 \le 25\}$ ***(2)***

2) Δίνεται η καμπύλη C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\cos(\pi t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ με $0\le t\le 4$. Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (1,-1,1).
Β) Έστω $f(x,y,z)=y^3-2x-z\exp(yz+1)$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (1,-1,1) και θέλετε να κινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ως προς ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθείτε έτσι ώστε η τιμή της f να αυξάνεται; ***(2)***

3) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή Τ του επιπέδου ΟΧΥ στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\ln 2} dx \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

4) Δίδεται η καμπύλη Κ του επιπέδου ΟΧΥ με εξίσωση $f(x,y)=0$ με $a \le x \le b$. Ποια είναι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται εάν η καμπύλη περιστραφεί
α) γύρω από τον άξονα ΟΧ,
β) γύρω από τον άξονα ΟΥ.
γ) Εάν η καμπύλη περιστραφεί γύρω από τον άξονα ΟΖ περιγράψτε γεωμετρικά το σχήμα της επιφάνειας που θα δημιουργηθεί.
Εφαρμόστε τα ανωτέρω για την καμπύλη $f(x,y) = y - x^3 = 0$ με $1 \le x \le 3$ ***(2)***

5) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση: $\mathbf{v}=\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού ανά δευτερόλεπτο διαπερνούν την επιφάνεια S: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$. ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2013

(για τους επί πτυχίω)

1) Να αποδειχθεί η ισότητα :

$$\int_0^a \left[\int_0^y e^{m(a-x))} f(x)dx \right] dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x)dx$$

όπου m, α είναι θετικοί σταθεροί αριθμοί. ***(2)***

2) Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των δυο προτάσεων :

α) Το διανυσματικό πεδίο **F** είναι βάθμωση κάποιου βαθμωτού πεδίου f, δηλ. **F**=∇f.

β) $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ όπου C_1 και C_2 είναι δυο οποιεσδήποτε καμπύλες με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία και περιγραφόμενες από τις διανυσματικές συναρτήσεις: $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ αντίστοιχα. ***(2)***

3) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις του ημικυκλίου $x^2+y^2=R^2$, y>0 χρησιμοποιώντας σαν παράμετρο την κλίση t=dy/dx της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (x,y). ***(1)***

4) Αναφέρατε το θεώρημα του Gauss. Γιατί απαιτείται η διαφορισιμότητα του διανυσματικού πεδίου **F**; Να επαληθευτεί το θεώρημα του Gauss, (εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος), για το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F} = -\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ και για το στερεό V που ορίζεται από τις ανισότητες: $1\le x^2+y^2+z^2 \le 4$. ***(2)***

5) Θεωρούμε τις συναρτήσεις φ(t) και f(x,y,z) τέτοιες ώστε να υπάρχει η φ'(t) και $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Δείξτε ότι για την σύνθετη συνάρτηση F(x,y,z)=φ(f(x,y,z)) ισχύει ότι $\|\nabla F(x,y,z)\|^2 = 4f(x,y,z)[\varphi'(f(x.y,z)]^2$. ***(1,5)***

6) Θεωρούμε το βαθμωτό πεδίο $f=x^2+y^2+z^2$ και $z=x^2+y^2$. Ποια είναι η σωστή απάντηση για την μερική παράγωγο $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: α) 2x, β) $2x+4x^3+4xy^2$, γ) 0, δ) καμμία από τις προηγούμενες και γιατί; ***(1,5)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Ιουνίου 2013

1) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ στο σημείο (2, 5) παίρνει την τιμή $f(2,5)=7$ και οι μερικές παράγωγοι τις τιμές $f_x(2, 5)=3$, $f_y(2, 5)=1$. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή της στα σημεία (2.2, 5.1) και (1.9, 5.2). ***(1)***

2) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$:

α) Ως προς ποια διεύθυνση ξεκινώντας από το σημείο (0, π/2) ο συντελεστής μεταβολής του βαθμωτού πεδίου είναι μέγιστος ;

β) Ως προς ποιές διευθύνσεις ξεκινώντας από το σημείο (0, π/2) ο συντελεστής μεταβολής του βαθμωτού πεδίου ισούται με το 50% του μέγιστου συντελεστή;

γ) Εάν το βαθμωτό πεδίο ήταν τριών μεταβλητών: $f=(x,y,z)$ τι είδους επιφάνεια θα σχημάτιζαν αυτές οι διευθύνσεις; ***(1,5)***

3) Έστω το στερεό V που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια, που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$, και πάνω από την περιοχή του T του επιπέδου OXY που ορίζεται από την σχέση: $1\le x^2+y^2\le 2$.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού V.

β) Να υπολογίσετε την ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}=(2x-xy)\mathbf{i}-y\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ δια μέσου του όγκου V. ***(1,5)***

4) Δίδεται η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τμήματος S της επιφάνειας της σφαίρας που ορίζεται από την σχέση: $0\le z\le 1$. ***(2)***

5) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D x^2dxdy$, όπου D το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία (1,1), (2,3), (4,6) και (3,4). ***(2)***

6) Θεωρούμε μια ηλεκτρικά φορτισμένη υλική πλάκα, της οποίας η περίμετρος ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. Η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου δίνεται από την σχέση: $\rho(x,y)=10-(x-1)^2-y^2$. Να βρεθούν τα σημεία της υλικής πλάκας όπου η πυκνότητα $\rho(x,y)$ του φορτίου είναι μεγίστη ή ελαχίστη. ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2013

1) **Α)** Τι παριστάνουν οι παρακάτω εκφράσεις:

α) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ β) $\mathbf{r}=3t\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$ γ) $f=x^2+z\sin y$

δ) $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}-8\mathbf{j}+6z\mathbf{k}$ ε) $f=x+y^2z+z\mathbf{j}$

Β) Εάν f(**r**) είναι ένα βαθμωτό πεδίο, ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις παριστούν α) βαθμωτό πεδίο, β) διανυσματικό πεδίο. Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

1) grad(f(**r**)) 2) div(f(**r**)) 3) rot(f(**r**)) 4) rot(grad(f(**r**))) 5) div(grad(f(**r**))) ***(1,5)***

2) Έστω **r**=**r**(t) μια διανυσματική συνάρτηση, η οποία παριστάνει την καμπύλη C. Δείξτε ότι ένας μετασχηματισμός της παραμέτρου $t=f(t')$ με αρνητική παράγωγο : $df(t')/dt'<0$ αντιστρέφει την φορά διαγραφής της καμπύλης. Αναφέρατε ένα παράδειγμα. ***(1)***

3) α) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_V \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 dxdydz$

όπου V το στερεό, που ορίζεται από τις εξισώσεις $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$ και $z \ge 0$. ***(1,5)***

4) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=16$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ με την χρήση κατάλληλου διπλού ολοκληρώματος. ***(2)***

5) Έστω C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t)=\cos(\pi t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4$$

α) Σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική της παράσταση σημειώνοντας τα άκρα της.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (-1,1,1) της καμπύλης.

γ) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y,z)=x^3-2y-ze^{xz+1}$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (-1,1,1) και θέλετε να μετακινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ποια διεύθυνση θα ακολουθήσετε για να μειωθεί η τιμή του βαθμωτού πεδίου. Ποια είναι η κατευθύνουσα παράγωγος του f σε αυτή την διεύθυνση; ***(2)***

6) Εάν το υψόμετρο ενός βουνού δίνεται από την συνάρτηση $z=f(x,y)=300-x^2-3y^2$(σε μέτρα), ποία είναι η διαδρομή με την πλέον απότομη κατάβαση από το σημείο P(10,3,173) και ποια η διαδρομή με σταθερό υψόμετρο; ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2014

1) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$.

α) Ως προς ποια διεύθυνση ξεκινώντας από το σημείο (0, π/2) ο συντελεστής μεταβολής του βαθμωτού πεδίου είναι μέγιστος ;

β) Ως προς ποιές διευθύνσεις ξεκινώντας από το σημείο (0, π/2) ο συντελεστής μεταβολής του βαθμωτού πεδίου ισούται με το 50% του μέγιστου συντελεστή;

γ) Εάν το βαθμωτό πεδίο ήταν τριών μεταβλητών: $f=(x,y,z)$ τι είδους επιφάνεια θα σχημάτιζαν αυτές οι διευθύνσεις; ***(2)***

2) Έστω ότι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από την σχέση: **v**=**i**+x**j**+z**k**, (σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο). Υπολογίστε πόσα κυβικά μέτρα ρευστού ανά δευτερόλεπτο διαπερνούν την επιφάνεια S: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$. ***(2)***

3) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P(x_0, y_0 z_0)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που τις συνδέει. ***(1,5)***

4) α) Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για την επιφάνεια:

$$S=\left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2=R^2\right\},\ \ y\geq 3x$$

(Υπόδειξη: η επιφάνεια S είναι ένα ημισφαίριο)

β) Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για το σύνορο C της επιφάνειας S.***(2)***

5) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του κάτω ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2,5)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2014

1) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}-yz^2\mathbf{j}-y^2z\mathbf{k}$$

για την απλή κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2=1$, $z=0$, και για την επιφάνεια S που αποτελείται από την παράπλευρη επιφάνεια S_1 του κυλίνδρου που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2=1$ με $0\le z\le 5$ και από τον κυκλικό δίσκο S_2 που ορίζεται από τις εξισώσεις: $x^2+y^2\le 1$ με $z=5$. ***(2)***

2) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην περιοχή R του δεξιού ημικυκλίου $x^2+y^2=4$ ***(2)***

3) Έστω οι καμπύλες C_1, C_2 με διανυσματικές παραμετρικές εξισώσεις:

$\mathbf{r}_1(t)=a\cos t\mathbf{i}+b\sin t\mathbf{j},\ \ 0\le t\le\pi$ και $\mathbf{r}_2(t)=a\cos t\mathbf{i}-b\sin t\mathbf{j},\ \ 0\le t\le\pi$ αντίστοιχα.

α) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες αυτές σημειώνοντας και την φορά διαγραφής.

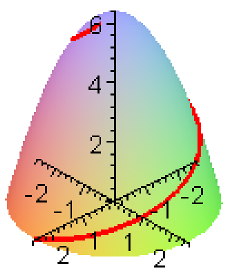
β) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{-x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

γ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ και $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ άμεσα.

δ) Τα αποτελέσματα του ερωτήματος (γ) έρχονται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο **F** είναι συντηρητικό; ***(2)***

4) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=y^3\mathbf{i}+(4x-2x^3)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2)***

5) Ένας ποδηλάτης ανεβαίνει ένα βουνό, η επιφάνεια του οποίου περιγράφεται από την εξίσωση: $z=2\pi-x^2-y^2$. Ξεκινά από το σημείο $A=\left(\sqrt{2\pi},0,0\right)$ και καταλήγει στην κορυφή $B(0,0,2\pi)$ μετά από μια πλήρη περιστροφή γύρω από το βουνό ακολουθώντας ένα μονοπάτι του οποίου η κατακόρυφη κλίση είναι σταθερή. Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση του μονοπατιού. Εάν ο ποδηλάτης υφίσταται μια δύναμη που περιγράφεται από το δυναμικό πεδίο $F=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\mathbf{k}$, να υπολογιστεί το έργο που καταναλώνει κατά την διαδρομή από το σημείο Α στο σημείο Β. ***(2)***



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2014

1) Αναφέρατε το θεώρημα του Gauss. Γιατί απαιτείται η διαφορισιμότητα του διανυσματικού πεδίου **F**; Να επαληθευτεί το θεώρημα του Gauss, (εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος), για το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F} = -\dfrac{\mathrm{x}\mathbf{i} + \mathrm{y}\mathbf{j} + \mathrm{z}\mathbf{k}}{\left(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2\right)^{3/2}}$ και για το στερεό V που ορίζεται από τις ανισότητες: $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$.

2) Εάν f(x,y) και g(x,y) συνεχώς διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις στην περιοχή T, δείξτε ότι για κάθε απλή κλειστή καμπύλη C, που βρίσκεται στο εσωτερικό της T, ισχύει:

$$\oint_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

3) Έστω V το στερεό που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια με εξίσωση $z = f\left(x, y\right) = e^{x^2+y^2}$ και πάνω από την επίπεδη περιοχή που ορίζεται από την διπλή ανισότητα $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

α) Να υπολογιστεί ο όγκος του V.

β) Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \left(2x - xy\right)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ προς το εξωτερικό του στερεού

4) Χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+6x+3y$.

5) Να ορισθεί η διαδρομή πάνω στην επιφάνεια S με εξίσωση $z=f(x,y)=x^2+3y^2$ με την πλέον απότομη κάθοδο από το σημείο α) $P_1(1,1,4)$, β) $P_2(1,-2,13)$.

Καλή Επιτυχία

(Τα θέματα είναι ισοδύναμα)

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2015

1) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x+2y-αz)**i**+(βx-3y)**j**+(4x-γy+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο A(0,-1,2) στο σημείο B(-2,1,0). ***(2)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P(x_0, y_0 z_0)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; ***(1,5)***

3) Ένας ορειβάτης ανεβαίνει ένα βουνό του οποίου το ύψος δίνεται από την σχέση:

$$z=1000-2x^2-3y^2.$$

Όταν βρίσκεται στο σημείο (1,1,995) θέλει να κινηθεί προς την διεύθυνση μέγιστης ανάβασης. Ποιά είναι αυτή η διεύθυνση; Αν συνεχίσει να ανεβαίνει ακολουθώντας διαδρομή μέγιστης ανάβασης, δείξτε ότι η διαδρομή αυτή προβάλλεται στο Oxy επίπεδο επάνω στην καμπύλη $y^2=x^3$. ***(2)***

4) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο της κάτω βάσεως ενός υλικού ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσεως R και ύψος h. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου έχει επιφανειακή πυκνότητα d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο από την παράπλευρη επιφάνεια. ***(2,5)***

5) Έστω C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4$$

α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (3,0,6) της καμπύλης.

β) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y,z) = x^3 - 2y - xz$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (3,0,6) και θέλετε να μετακινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ποια διεύθυνση θα ακολουθήσετε για να αυξηθεί η τιμή του βαθμωτού πεδίου; ***(2)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2015

1) Το ύψος h σε χιλιόμετρα ενός βουνού δίνεται από την σχέση $h == 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}$.

α) Ένας πεζοπόρος βρίσκεται στο σημείο (1,2,2) και κινείται προς την διεύθυνση της μεγίστης κατάβασης. Ποιό μοναδιαίο διάνυσμα δείχνει την διεύθυνση αυτή.

β) Εάν ο πεζοπόρος από το σημείο (1,2,2) κινηθεί προς την διεύθυνση του σημείου (-1,3,2), θα ανέβει ή θα κατέβει;

γ) Ποιο μονοπάτι πρέπει να ακολουθήσει ο πεζοπόρος για να φθάσει στην κορυφή με την μέγιστη δυνατή ανάβαση; **(2)**

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, με την χρήση κατάλληλου διπλού ολοκληρώματος. **(2)**

3) Δίδεται η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=R^2$ και ο κύλινδρος $x^2+y^2=α^2$ με $0<α<R$. Να προσδιοριστεί η ακτίνα του κυλίνδρου α έτσι ώστε το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εκτός</u> του κυλίνδρου να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εντός</u> του κυλίνδρου. **(1.5)**

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oiint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \mathrm{dS}$ όπου α) η επιφάνεια S είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, β) η επιφάνεια του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα x=-1, x=1, y=-1 , y=1 , z=-1 , z=1 γ) η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z=4-(x^2+y^2)$ και του ΟΧΥ επιπέδου. **(1.5)**

5) α) Να αποδειχθεί η ισότητα :

$$\int_0^a \left[\int_0^y \sin\left(m\left(a-x\right)\right) f(x)dx \right] dy = \int_0^a \left(a-x\right) \sin\left(m\left(a-x\right)\right) f(x)dx$$

όπου m, α είναι θετικοί σταθεροί αριθμοί.

β) Ποιά σχέση συνδέει τα ολοκληρώματα

$$\mathrm{I}_1 = \left[\int_\alpha^\beta \mathrm{f(x)dx} \right]^2 \qquad \text{και} \qquad \mathrm{I}_2 = \int_\alpha^\beta \mathrm{dx} \int_\mathrm{x}^\beta \mathrm{dyf(x)f(y)}$$

(*Υπόδειξη : Μπορείτε να θεωρήσετε μια παράγουσα της* f(x)) **(1)**

6) Θεωρούμε έναν μεταλλικό κυκλικό δίσκο με εξίσωση $x^2+y^2=4$. Ο δίσκος θερμαίνεται έτσι ώστε η θερμοκρασ*ία T* σε κάθε σημείο (x,y) δίνεται από την σχέση:

$T(x,y)=2x^2+y^2-y$

Βρείτε τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία του μεταλλικού δίσκου καθώς και τη θερμοκρασία τους. **(2)**

(Καλή Επιτυχία)

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2015

1) Έστω το δυναμικό πεδίο: **F**=$\left(\frac{x^2y}{3}-y\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{xy^2}{4}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(2)***

2) Η κατευθύνουσα παράγωγος του βαθμωτού πεδίου f(x,y,z) σ' ένα δεδομένο σημείο P είναι μεγίστη στην διεύθυνση του διανύσματος **v**=**i**+**j**-**k**. Στην διεύθυνση αυτή η τιμή της κατευθύνουσας παραγώγου είναι $2\sqrt{3}$. α) Να βρεθεί η κλίση του f στο P. β) Να βρεθεί η κατευθύνουσα παράγωγος του f στο P ως προς την διεύθυνση του διανύσματος **i**+**j**. ***(1,5)***

3) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης **F**=x**i**+λ^2y**j**+z**k** κατά μήκος του τμήματος της καμπύλης **r**(t)=cost**i**+sint**j**+t**k** , $0\le t\le \pi/2$. Για ποια τιμή του λ το έργο γίνεται α) ελάχιστο β) μέγιστο. ***(2)***

4) Δίνεται ο κύλινδρος $x^2+y^2=R^2$ με $2\le z\le 5$. Να υπολογιστεί ο όγκος του μέρους του κυλίνδρου που αποκόπτεται από τα επίπεδα y=αx και y=βx και που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο, (x, y, z≥0) και στο τρίτο, (x, y<0, z>0). ***(2)***

5) Δίδονται οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2+y^2=R_1^2$, $\left(x-k\right)^2+y^2=R_2^2$ με $R_1=4$ $R_2=3, k=5$.

α) Σχεδιάστε τους κύκλους και βρείτε τα σημεία τομής των. Να υπολογιστεί με την χρήση κατάλληλου διπλού ολοκληρώματος το εμβαδόν E της κοινής περιοχής των.

β) Υποθέτουμε ότι το κέντρο $\left(k,0\right)$ του μικρού κύκλου, με ακτίνα $R_2=3$, μετακινείται από τα δεξιά προς τα αριστερά του άξονα OX στο διάστημα μεταβολής $-(R_1+R_2)<k< R_1+R_2$. Σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική της παράσταση της συνάρτησης $E=E\left(k\right)$ που δίνει το εμβαδόν της κοινής περιοχής των δυο κύκλων και αιτιολογείστε την μορφή της. Δεν χρειάζεται να βρείτε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης $E=E\left(k\right)$.

Δίδεται: $\int\sqrt{a^2-\left(x-b\right)^2}dx=\left[\frac{x-b}{2}\sqrt{a^2-\left(x-b\right)^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]$ ***(2,5)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2016

1) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=3x+4y-1$ υπό την συνθήκη $x^2+y^2=4$. Να χαρακτηριστούν τα ακρότατα.

2). Να επαληθευθεί το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(x^2-2xy)\mathbf{i}+(x^2y+3)\mathbf{j}$ και για την κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από τις σχέσεις $y^2=8x$, $x=2$.

3) Έστω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $P_1(2,3,1)$ και $P_2(5,7,9)$. Θεωρείστε ένα σωμάτιο, το οποίο κινείται επί του ευθυγράμμου τμήματος ταλαντευόμενο μεταξύ των σημείων P_1 και P_2. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις αυτής της κίνησης.

4) Να βρεθεί το βαθμωτό πεδίο $f(r)$, που ικανοποιεί την εξίσωση: $\nabla f=(1/r^5)\mathbf{r}$ και την συνθήκη $f(1)=0$.

5. Να βρε*θ*εί το κέντρο μάζας του τμήματος της ομογενούς σφαιρικής επιφάνειας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$, που βρίσκεται στο πρώτο οκταημόριο.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2016

1) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο της κάτω βάσεως ενός υλικού ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσεως R και ύψος h. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα ρ. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο από την παράπλευρη επιφάνεια. ***(1,5)***

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που συνδέει αυτές τις δυο ταχύτητες. ***(1,5)***

3) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=\left(\frac{x^2 y}{9}\right)\mathbf{i}+\left(x-\frac{xy^2}{4}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. ***(1,5)***

4) Έστω οι καμπύλες C_1, C_2 με διανυσματικές παραμετρικές εξισώσεις:
$\mathbf{r}_1(t)=a\cos t\mathbf{i}+b\sin t\mathbf{j},\ 0\le t\le\pi$ και $\mathbf{r}_2(t)=a\cos t\mathbf{i}-b\sin t\mathbf{j},\ 0\le t\le\pi$ αντίστοιχα.

α) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες αυτές σημειώνοντας και την φορά διαγραφής.

β) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

γ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ και $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ άμεσα.

δ) Τα αποτελέσματα του ερωτήματος (γ) έρχονται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο **F** είναι συντηρητικό; ***(2)***

5) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f=x^2+y^2$ με την συνθήκη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Να εξετασθεί η περίπτωση α=β. ***(1)***

6) Ένας ποδηλάτης ανεβαίνει ένα βουνό, η επιφάνεια του οποίου περιγράφεται από την εξίσωση: $z=b-x^2-y^2$. Ξεκινά από το σημείο $\mathrm{A}\left(\sqrt{b},0,0\right)$ την χρονική στιγμή t_α και καταλήγει στην κορυφή B(0,0,b) την χρονική στιγμή t_b μετά από μια πλήρη περιστροφή γύρω από το βουνό ακολουθώντας ένα μονοπάτι, του οποίου η κατακόρυφη κλίση είναι σταθερή. Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση του μονοπατιού. Εάν ο ποδηλάτης υφίσταται μια δύναμη που περιγράφεται από το δυναμικό πεδίο F=-**i**+z**j**+y**k**, να υπολογιστεί το έργο που καταναλώνει κατά την διαδρομή από το σημείο Α στο σημείο Β. Εάν το μονοπάτι περιστρέφεται γύρω από το βουνό n φορές, πως θα αλλάξει η διανυσματική παραμετρική εξίσωση του μονοπατιού; Θα αλλάξει το έργο; ***(2,5)***

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016

1) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ στο σημείο (2, 5) παίρνει την τιμή $f(2,5)=7$ και οι μερικές παράγωγοι τις τιμές $f_x(2, 5)=3$, $f_y(2, 5)=1$. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή της στα σημεία (2.2, 5.1) και (1.9, 5.2). **(1)**

2) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο:
$\mathbf{F}=(x^2-2xy)\mathbf{i}+(x^2y+3)\mathbf{j}$ και για την κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από τις σχέσεις:
$y^2=8x$, $x=2$. **(2)**

3) Έστω C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\sin(\pi t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 4$$

α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (3,0,6) της καμπύλης.
β) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y,z)=x^3-2y-xz$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (3,0,6) και θέλετε να μετακινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ποια διεύθυνση θα ακολουθήσετε για να μειωθεί η τιμή του βαθμωτού πεδίου; **(2)**

4) Δίδεται η σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=R^2$ και ο κύλινδρος $x^2+y^2=\alpha^2$ με $0<\alpha<R$. Να προσδιοριστεί η ακτίνα του κυλίνδρου α έτσι ώστε το εμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εκτός</u> του κυλίνδρου να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας, που βρίσκεται <u>εντός</u> του κυκλίνδρου. **(2,5)**

5) Έστω το διπλό ολοκλήρωμα $I=\iint_T dydx=\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-x^2}} dy$.

α) Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης Τ.
β) Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα με την αντίστροφη σειρά ολοκληρώσεως.
γ) Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.
δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_T dydx$. **(2,5)**

Καλή Επιτυχία

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2017
(Επί πτυχίω)

1) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x+2y-αz)**i**+(βx-3y)**j**+(4x-γy+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, $\gamma \in R$ έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο Α(0,-1,2) στο σημείο Β(-2,1,0). ***(1,5)***

2) Ένα υλικό σημείο μάζας m_0 βρίσκεται στο κέντρο της κάτω βάσεως ενός υλικού ορθού κυλίνδρου με ακτίνα βάσεως R και ύψος h. Η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου έχει επιφανειακή πυκνότητα d. Να βρεθεί η δύναμη **F** με την οποία έλκεται το υλικό σημείο από την παράπλευρη επιφάνεια. ***(2)***

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο:
$\mathbf{F}=(x^2-2xy)\mathbf{i}+(x^2y+3)\mathbf{j}$ και για την κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από τις σχέσεις:
$y^2=8x$, $x=2$. ***(2)***

4) Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=3x+4y-1$ υπό την συνθήκη $x^2+y^2=4$. Να χαρακτηριστούν τα ακρότατα. ***(2)***

5) Το ύψος h σε χιλιόμετρα ενός βουνού δίνεται από την σχέση $h = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$.

α) Ένας πεζοπόρος βρίσκεται στο σημείο (1,2,2) και κινείται προς την διεύθυνση της μεγίστης κατάβασης. Ποιό μοναδιαίο διάνυσμα δείχνει την διεύθυνση αυτή.

β) Εάν ο πεζοπόρος από το σημείο (1,2,2) κινηθεί προς την διεύθυνση του σημείου (-1,3,2), θα ανέβει ή θα κατέβει;

γ) Ποιο μονοπάτι πρέπει να ακολουθήσει ο πεζοπόρος για να φθάσει στην κορυφή με την μέγιστη δυνατή ανάβαση;

(2,5)

Καλή Επιτυχία

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Ιουνίου 2017

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f=x^2+y^2$ με την συνθήκη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και να χαρακτηριστούν . Να εξετασθεί η περίπτωση α=β.

2) Ένας ποδηλάτης ανεβαίνει ένα βουνό, η επιφάνεια του οποίου περιγράφεται από την εξίσωση: $z=b-x^2-y^2$. Ξεκινά από το σημείο $A\left(\sqrt{b},0,0\right)$ την χρονική στιγμή t_α και καταλήγει στην κορυφή B(0,0,b) την χρονική στιγμή t_b μετά από μια πλήρη περιστροφή γύρω από το βουνό ακολουθώντας ένα μονοπάτι του οποίου η κατακόρυφη κλίση είναι σταθερή. Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση του μονοπατιού. Εάν ο ποδηλάτης υφίσταται μια δύναμη που περιγράφεται από το δυναμικό πεδίο $F=-\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$, να υπολογιστεί το έργο που καταναλώνει κατά την διαδρομή από το σημείο A στο σημείο B. Εάν το μονοπάτι περιστρέφεται γύρω από το βουνό n φορές, πως θα αλλάξει η διανυσματική παραμετρική εξίσωση του μονοπατιού; Θα αλλάξει το έργο;

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=16$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ με την χρήση κατάλληλου διπλού ολοκληρώματος.

4) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης C με διανυσματική παραμετρική εξίσωση: $\mathbf{r}(t)=\alpha(\sin t+\cos t)\mathbf{i}+\alpha(\sin t-\cos t)\mathbf{j}+\beta e^{-t}\mathbf{k}$ με α, β>0 συναντούν τον κύκλο $x^2+y^2=4\alpha^2$ του επιπέδου XOY, $\forall t\in R$.

5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $I=\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ όπου C το τμήμα της περιφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=R^2$, εξαιρουμένου του τμήματος της, που βρίσκεται στο τελευταίο τεταρτημόριο και που διαγράφεται κατά την θετική φορά.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2017

1) Εάν f(x,y) και g(x,y) συνεχώς διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις στην περιοχή T, δείξτε ότι για κάθε απλή κλειστή καμπύλη C, που βρίσκεται στο εσωτερικό της T, ισχύει:

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g\nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oiint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\mathrm{dS}$ όπου α) η επιφάνεια S είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, β) η επιφάνεια του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα x=-1, x=1, y=-1 , y=1 , z=-1 , z=1 γ) η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z=4-(x^2+y^2)$ και του OXY επιπέδου.

3) α) Να σχεδιαστεί η περιοχή T του επιπέδου OXY στην οποία αναφέρεται το διπλό ολοκλήρωμα: $\mathrm{I} = \int_0^{\ln 2} \mathrm{dx} \int_0^{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{dy}$

β) Να γίνει αντιστροφή των μεταβλητών και να υπολογιστεί ακολούθως το ολοκλήρωμα με τα νέα όρια. ***(2)***

4) Θεωρούμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από το άνω ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=1$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$. Να υπολογιστεί η ροή Φ του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ διαμέσου της επιφάνειας S.

5) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f = f(x, y, z)$ και το σημείο $P_0(x_0, y_0 z_0)$. Ποια διεύθυνση πρέπει να ακολουθείσετε ξεκινώντας από το σημείο P_0 ώστε ο συντελεστής αύξησης του βαθμωτού πεδίου να ισούται με το 1/2 του μέγιστου συντελεστή αύξησης του βαθμωτού πεδίου που έχει στο σημείο P_0. Τι είδους επιφάνεια σχηματίζουν οι διευθύνσεις αυτές.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2018

(Επί πτυχίω)

1) Δίνεται το δυναμικό πεδίο **F**=(x+2y-αz)**i**+(βx-3y)**j**+(4x-γy+2z)**k**. Να υπολογίσετε τα α, β, γ∈R έτσι ώστε το πεδίο **F** να είναι αστρόβιλο. Κατόπιν να υπολογίσετε το έργο που παράγει η δύναμη **F** όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο A(0,-1,2) στο σημείο B(-2,1,0). **(2)**

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που συνδέει αυτές τις δυο ταχύτητες. **(2)**

3) Να επαληθευθεί το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο **F**=(x^2-2xy)**i**+(x^2y+3)**j** και για την κλειστή καμπύλη C που ορίζεται από τις σχέσεις $y^2=8x$, $x=2$. **(2)**

4) Ένας ορειβάτης ανεβαίνει ένα βουνό του οποίου το ύψος δίνεται από την σχέση $z=1000-2x^2-3y^2$. Όταν βρίσκεται στο σημείο (1, 1, 995) θέλει να κινηθεί προς την διεύθυνση μέγιστης ανάβασης. Ποιά είναι αυτή η διεύθυνση; Αν συνεχίσει να ανεβαίνει ακολουθώντας διαδρομή μέγιστης ανάβασης, δείξτε ότι η διαδρομή αυτή προβάλλεται στο Oxy επίπεδο επάνω στην καμπύλη $y^2=x^3$. **(2)**

5) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_V \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 dxdydz$

όπου V το στερεό, που ορίζεται από τις εξισώσεις $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$ και $z \ge 0$. **(2)**

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Ιουνίου 2018

1) Έστω το δυναμικό πεδίο: $\mathbf{F}=\left(\frac{x^2y}{9}\right)\mathbf{i}+\left(x-\frac{xy^2}{4}\right)\mathbf{j}$. Να βρεθεί η απλή κλειστή καμπύλη που διαγράφεται κατά την θετική φορά κατά μήκος της οποίας το έργο που παράγεται από την δύναμη **F** να είναι μέγιστο. **(1,5)**

2) Ένα αντικείμενο κινείται σύμφωνα με το διάνυσμα θέσης **r**=**r**(t). Πόσο γρήγορα απομακρύνεται από το σημείο $P\left(x_0, y_0 z_0\right)$. Είναι αυτή η ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του αντικειμένου; Εάν όχι βρείτε την σχέση που συνδέει αυτές τις δυο ταχύτητες. **(2)**

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oiint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dS$ όπου α) η επιφάνεια S είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, β) η επιφάνεια του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα x=-1, x=1, y=-1 , y=1 , z=-1 , z=1 γ) η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z=4-(x^2+y^2)$ και του OXY επιπέδου. **(2)**

4) Έστω C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}\left(t\right)=t\mathbf{i}+\sin\left(\pi t\right)\mathbf{j}+2t\mathbf{k},\quad 0\le t\le 4$$

α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (3,0,6) της καμπύλης.
β) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f\left(x,y,z\right)=x^3-2y-xz$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (3,0,6) και θέλετε να μετακινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ποια διεύθυνση θα ακολουθήσετε για να μειωθεί η τιμή του βαθμωτού πεδίου; **(2)**

5) Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως $f=x^2+y^2$ με την συνθήκη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και να χαρακτηριστούν . Να εξετασθεί η περίπτωση α=β. **(2,5)**