Ασκήσεις Διανυσματικής Ανάλυσης

1) Το ύψος h σε χιλιόμετρα ενός βουνού δίνεται από την σχέση $h == 4 - x^2 - \frac{y^2}{4}$.

α) Ένας πεζοπόρος βρίσκεται στο σημείο (1,2,2) και κινείται προς την διεύθυνση της μεγίστης κατάβασης. Ποιό μοναδιαίο διάνυσμα δείχνει την διεύθυνση αυτή.

β) Εάν ο πεζοπόρος από το σημείο (1,2,2) κινηθεί προς την διεύθυνση του σημείου (-1,3), θα ανέβει ή θα κατέβει;

γ) Ποιο μονοπάτι πρέπει να ακολουθήσει ο πεζοπόρος για να φθάσει στην κορυφή με την μέγιστη δυνατή ανάβαση;

Απ. α) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$ β) θα ανέβει γ) $\mathbf{r}_\kappa(t) = t\mathbf{i} + 2t^{1/4}\mathbf{j} + (4 - t^2 - t^{1/2})\mathbf{k}$

2)

α) Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$.

β) Τοποθετούμε ένα μικρό σώμα στο σημείο (2,-1). Το σώμα θα περιστραφεί κατά την θετική φορά ή την αρνητική;

Απ. α) $\nabla \times \mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{k}$ β) κατά την αρνητική φορά

3) Έστω η καμπύλη C : $\mathbf{r}(t) = (3\cos t + 4\sin t)\mathbf{i} + (-4\cos t + 3\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

α) Να δείξετε ότι η καμπύλη C είναι μια ρευματική γραμμή του διανυσματικού πεδίου **F**.

β) Δείξτε ότι η καμπύλη C παριστάνει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$.

4) Έστω *D* το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία (1,1), (2,3), (4,6) και (3,4).

α) Έστω D_1^* το μοναδιαίο τετράγωνο [0,1]×[0,1]. Εξηγείστε γιατί δεν είναι δυνατό να βρούμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T(u,v) = (au + bv, cu + dv)$ έτσι ώστε $T(D_1^*) = D$.

β) Βρείτε μια ορθογώνια περιοχή D_2^* και έναν γραμμικό μετασχηματισμό

$T(u,v) = (au + bv, cu + dv)$, έτσι ώστε $T(D_2^*) = D$.

γ) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D x^2 x dy$.

Απ. β) $D_2^* = [-2,-1]\times[-1,0]$, $T(u,v) = (-2u+v, -3u+2v)$ γ) 20/3

5) Έστω C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4$$

α) Σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική της παράσταση σημειώνοντας τα άκρα της.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο (-1,1,1).

γ) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y,z) = x^3 - 2y - ze^{xz+1}$. Υποθέστε ότι βρίσκεστε στο σημείο (-1,1,1) και θέλετε να μετακινηθείτε κατά μήκος της εφαπτομένης. Ποια διεύθυνση θα ακολουθήσετε για να μειωθεί η τιμή του βαθμωτού πεδίου. Ποια είναι η κατευθύνουσα παράγωγος του f σε αυτή την διεύθυνση;

Απ. β) $\mathbf{r}_\varepsilon(t) = (-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) + (t-1)(\mathbf{j}+\mathbf{k})$ γ) $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$, $-\sqrt{2}$

6) Έστω το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\mathrm{T}} dydx = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx$.

α) Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης Τ.

β) Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα με την αντίστροφη σειρά ολοκληρώσεως.

γ) Ξαναγράψτε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\mathrm{T}} dydx$.

Απ. β) $\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}y} dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dxdy$ γ) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 r dr d\theta$ δ) 2π/3

7) Έστω V το στερεό τετράεδρο με κορυφές τα σημεία (0,0,0), (5,0,0), (0,5,0) και (0,0,5).

α) Σχεδιάστε το στερεό V σημειώνοντας τις κορυφές του.

β) Έστω S η επιφάνεια του στερεού. Υπολογίστε την ροή του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F} = (x - 3yz)\mathbf{i} + (x^3 + y)\mathbf{j} + (\tan(xy) + z)\mathbf{k}$$

γ) Υπολογίστε την ροή του στροβιλισμού του **F** δια μέσου της επιφάνειας S.

Απ. β) 125/2 γ) 0

8) Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 5e^{2y}\sin(3z)\mathbf{i} + 10xe^{2y}\sin(3z)\mathbf{j} + 15xe^{2y}\cos(3z)\mathbf{k}$$

α) Υπολογίστε τον στροβιλισμό του **F** και δείξτε ότι είναι συντηρητικό.

β) Βρείτε ένα βαθμωτό πεδίο $f(x, y, z)$ έτσι ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.

γ) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ όπου C η καμπύλη με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\mathbf{r}(t) = te^{1-t^3}\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathbf{j} + \frac{2}{3}\tan^{-1}(t^2)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$.

Απ. α) 0, β) $f(x, y, z) = 5xe^{2y}\sin 3z + k$ γ) $5e^2$

9) α) Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για την επιφάνεια

$$S = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}, \ y \ge 3x$$

(Υπόδειξη: η επιφάνεια S είναι ένα ημισφαίριο)

β) Να βρεθεί μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση για το σύνορο C της επιφάνειας S.

Απ. α) $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = R\cos\theta\sin\varphi\mathbf{i} + R\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + R\cos\varphi\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \ 0 \le \varphi \le \pi$

β) $\mathbf{r}(t) = \frac{R}{\sqrt{10}}\sin t\mathbf{i} + \frac{3R}{\sqrt{10}}\sin t\mathbf{j} + R\cos t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

10) Έστω D η περιοχή που ορίζεται από την σχέση:

$$D = \{(x, y) : 2 \le x + 2y \le 4, \ 0 \le x - y \le 3\}$$

α) Σχεδιάστε την περιοχή D.

β) Βρείτε μια ορθογώνια περιοχή D^* =[a,b]×[c,d] και έναν γραμμικό μετασχηματισμό T έτσι ώστε D=T(D^*)

γ) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D \frac{x-y}{(x+2y)^2}dxdy$ χρησιμοποιώντας κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών.

Απ) β) $D^*=[2,4]\times[0,3]$ $T(u,v)=\left(\frac{u+2v}{3},\frac{u-v}{3}\right)$, γ) 3/8

11) Έστω οι καμπύλες C_1, C_2 με διανυσματικές παραμετρικές εξισώσεις:

$\mathbf{r}_1(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j},\ 0\le t\le\pi$ και $\mathbf{r}_2(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j},\ 0\le t\le\pi$ αντίστοιχα.

α) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες αυτές.

β) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{-x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

γ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ και $\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ άμεσα.

δ) Τα αποτελέσματα του ερωτήματος (γ) έρχονται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο **F** είναι συντηρητικό;

Απ) β) $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, γ) -π, π

12) Έστω το βαθμωτό πεδίο $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$

α) Ως προς ποια διεύθυνση , ξεκινώντας από το σημείο (0,π/2), το βαθμωτό πεδίο *f* έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή μεταβολής;

β) Ως προς ποια διεύθυνση , ξεκινώντας από το σημείο (0,π/2), το βαθμωτό πεδίο *f* έχει συντελεστή μεταβολής ίσο με το 50% του μεγαλύτερου συντελεστή μεταβολής;

γ) Έστω $\mathbf{r}(t)$ η ρευματική γραμμή της βάθμωσης $\mathbf{F}=\nabla f$ με $\mathbf{r}(0)=(0/\pi/2)$. Να υπολογιστεί η παράγωγος $\frac{d}{dt}\left[f(\mathbf{r}(t))\right]\Big|_{t=0}$.

Απ. α) $\mathbf{u}=\frac{\pi}{2}\mathbf{i}$ β) Ως προς την διεύθυνση του διανύσματος **n** που σχηματίζει με την διεύθυνση της βάθμωσης $\frac{\pi}{2}\mathbf{i}$, γωνία π/3, γ) $\pi^2/4$

13) Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_V \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 dxdydz$

όπου V το στερεό, που ορίζεται από τις εξισώσεις $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$ και $z \ge 0$.

Απ. $\frac{2\pi}{3}\left(e^{\sqrt{8}}-e\right)$

14) Έστω V το στερεό που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια με εξίσωση

$z = f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ και πάνω από την επίπεδη περιοχή που ορίζεται από την διπλή ανισότητα $1 \le x^2+y^2 \le 2$.

α) Να υπολογιστεί ο όγκος του V.

β) Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (2x-xy)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ προς το εξωτερικό του στερεού

Απ. α) $V = \pi e(e-1)$, β) $\pi\left(e^2-e\right)$

15) Εάν f(x,y) και g(x,y) συνεχώς διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις στην περιοχή T, δείξτε ότι για κάθε απλή κλειστή καμπύλη C, που βρίσκεται στο εσωτερικό της T, ισχύει:

$$\oint_C f\nabla g \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g\nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

16) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επίπεδης περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=16$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Γενικά: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x^2+y^2=R^2 \quad \mu\varepsilon \quad R<b<a$

Απ. 4π