

6) Θεωρούμε έναν μεταλλικό κυκλικό δίσκο με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Ο δίσκος θερμαίνεται έτσι ώστε η θερμοκρασία T σε κάθε σημείο (x,y) δίνεται από την σχέση:

$$T(x,y)=x^2+2y^2-x$$

Βρείτε τα πιο θερμά και τα πιο ψυχρά σημεία του μεταλλικού δίσκου καθώς και τη θερμοκρασία τους.

Λύση: Τα ακρότατα θα αναζητηθούν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου και στην περιφέρεια του.

α) Στο εσωτερικό του δίσκου. Ψάχνουμε να βρούμε που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι του T . Έχουμε:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=2x-1=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=4y=0 \Rightarrow (x,y)=(1/2,0)$$

Χρησιμοποιούμε την ορίζουσα του Hess για να βρούμε το είδος του ακροτάτου:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=4, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}=0 \Rightarrow H=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=8$$

Επειδή $H>0$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2>0$, το ακρότατο είναι ελάχιστο και το ελάχιστο αυτό είναι $T(1/2,0)=-1/4$

β) Στην περιφέρεια του δίσκου.

Α Τρόπος: Μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Έχουμε:

$$F = (x^2 + 2y^2 - x) + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\nabla F = \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + 2y^2 - x) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)] \mathbf{i} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + 2y^2 - x) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)] \mathbf{j} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$2x - 1 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$4y + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

Από την σχέση (2) διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Εάν $y = 0$ τότε από την σχέση $x^2+y^2=1$ έχουμε $x=\pm 1$. Τα κρίσιμα σημεία είναι: $(x,y) = (\pm 1, 0)$ με αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

$$T(1,0)=0 \quad \text{και} \quad T(-1,0)=2.$$

β) Εάν $y \neq 0$ τότε από την (2) προκύπτει $\lambda=-2$ (3). Η (1) με την βοήθεια της (3) γράφεται $2x - 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (4) και από την σχέση $x^2+y^2=1$ βρίσκουμε το y :

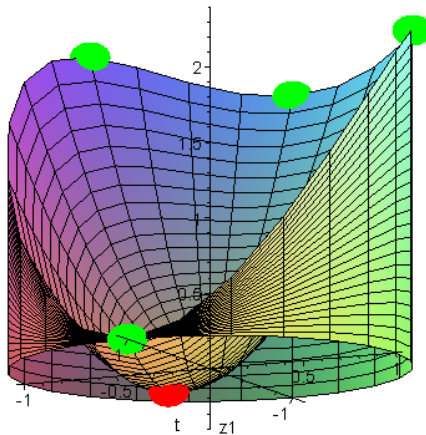
$$\frac{1}{4} + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ με αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης:

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}, \quad T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange τα ακρότατα πάνω στην περιφέρεια $x^2 + y^2 = 1$ είναι:

$$T(1, 0) = 0, \quad T(-1, 0) = 2, \quad T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}, \quad T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$$



Β τρόπος: Χρησιμοποιούμε τις συνήθεις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου: $x = \cos t$, $y = \sin t$, οπότε η θερμοκρασία $T(x, y)$ γράφεται σαν συνάρτηση του t :

$$T(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t - \cos t = 1 + \sin^2 t - \cos t$$

Βρίσκουμε τα ακρότατα με τον συνήθη τρόπο:

$$\frac{dT}{dt} = 2\sin t \cos t + \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0, \quad \cos t = -\frac{1}{2}$$

1) $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pi$

2) $\cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2}{3}\pi, t = \frac{4}{3}\pi$

1α) Για $t = 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1, y = \sin 0 = 0$. Ακρότατο σημείο $(1, 0)$

1β) Για $t = \pi \Rightarrow x = \cos \pi = -1, y = \sin \pi = 0$. Ακρότατο σημείο $(-1,0)$

2α) Για $t = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow x = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}, y = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2β) Για $t = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow x = \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}, y = \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Χαρακτηρισμός των ακροτάτων χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο:

Έχουμε: $\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + \cos t$. Επομένως

1α) Για το ακρότατο σημείο $(1,0)$, που αντιστοιχεί για $t=0$, έχουμε:

$$\left. \frac{d^2T(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + \cos t \Big|_{t=0} = 2+1=3 > 0 \text{ άρα το σημείο } (1,0) \text{ είναι σημείο}$$

ελαχίστου με ελάχιστο $T(1,0) = 0$.

1β) Για το ακρότατο σημείο $(-1,0)$, που αντιστοιχεί για $t = \pi$, έχουμε:

$$\left. \frac{d^2T(t)}{dt^2} \right|_{t=\pi} = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + \cos t \Big|_{t=\pi} = 2+1=3 > 0 \text{ άρα το σημείο } (-1,0) \text{ είναι σημείο}$$

ελαχίστου με ελάχιστο $T(-1,0) = 2$.

2α) Για το ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που αντιστοιχεί για $t = \frac{2}{3}\pi$, έχουμε:

$$\left. \frac{d^2T(t)}{dt^2} \right|_{t=\frac{2}{3}\pi} = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + \cos t \Big|_{t=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{3}{2} < 0 \text{ άρα το } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ είναι σημείο}$$

μεγίστου με μέγιστο $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

2β) Για το ακρότατο σημείο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που αντιστοιχεί για $t = \frac{4}{3}\pi$, έχουμε:

$$\left. \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right|_{t=\frac{4}{3}\pi} = 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t + \cos t \Big|_{t=\frac{4}{3}\pi} = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{άρα το σημείο } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ είναι}$$

$$\text{σημείο μεγίστου με μέγιστο } T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Γ τρόπος: Από την εξίσωση του κύκλου: $x^2 + y^2 = 1$ λύνουμε ως προς $y^2 = 1 - x^2$, (επειδή ο τύπος της θερμοκρασίας T δεν περιέχει y) και αντικαθιστούμε στον τύπο του T :

$$T(x) = x^2 + 2(1 - x^2) - x = -x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2 \text{ και από την}$$

σχέση $x^2 + y^2 = 1$ βρίσκουμε $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως τα ακρότατα σημεία είναι

$\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Επειδή δε $\frac{d^2 T}{dx^2} = -2 < 0$ τα σημεία αυτά είναι σημεία μεγίστου. Οι

αντίστοιχες τιμές των μεγίστων είναι:

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} \text{ και } T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

Όμως ακρότατα πρέπει να αναζητήσουμε και στα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ μεταβολής του x . Όταν το $x = -1$ ή 1 το y είναι 0 . Επομένως ακρότατα έχουμε στα σημεία $(-1, 0)$ και $(1, 0)$, τα οποία είναι σημεία ελαχίστου επειδή παρεμβάλλονται

μεταξύ των σημείων $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, που είναι σημεία μεγίστου. Οι

αντίστοιχες τιμές των ελαχίστων είναι: $T(-1, 0) = 2$, $T(1, 0) = 0$.

Δ τρόπος: Εάν από την εξίσωση του δίσκου $x^2 + y^2 = 1$ λύσουμε ως προς x θα έχουμε $x = \pm \sqrt{1 - y^2}$ και αντικαθιστώντας στον τύπο του T , βρίσκουμε:

$$T_+(y) = 1 - y^2 + 2y^2 - \sqrt{1 - y^2} = y^2 + 1 - \sqrt{1 - y^2} \quad \text{για } x = +\sqrt{1 - y^2}$$

$$T_-(y) = 1 - y^2 + 2y^2 + \sqrt{1 - y^2} = y^2 + 1 + \sqrt{1 - y^2} \quad x = -\sqrt{1 - y^2} \quad \text{Εύρεση}$$

των ακροτάτων

$$\frac{dT_+}{dy} = 2y - \frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2}} = 2y + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{dT_-}{dy} = 2y + \frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2}} = 2y - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0 \quad (\text{B})$$

α) Εάν $y = 0$ τότε $x = \pm 1$ και τα ακρότατα σημεία είναι $(\pm 1, 0)$.

Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο του T για τον χαρακτηρισμό των ακροτάτων αυτών σημείων:

$$\frac{d^2T_+}{dy^2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + y \left(-\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y) \right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + y^2(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2T_-}{dy^2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y \left(-\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2y) \right) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y^2(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ Για } y=0$$

$$\text{έχουμε } \left. \frac{d^2T_+}{dy^2} \right|_{y=0} = 2+1=3 > 0, \quad \left. \frac{d^2T_-}{dy^2} \right|_{y=0} = 2-1=1 > 0$$

Επομένως τα ακρότατα $(\pm 1, 0)$ είναι σημεία ελαχίστων με $T(1,0)=0$ και $T(-1,0)=2$.

β) Εάν $y \neq 0$ τότε από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου

$$\frac{dT_+}{dy} = 2y + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \text{ προκύπτουν μιγαδικές τιμές για το } y \text{ και η περίπτωση αυτή,}$$

που αντιστοιχεί για $x = \sqrt{1-y^2}$ απορρίπτεται. Επομένως θα έχουμε μόνο $x = -\sqrt{1-y^2}$.

Τώρα λύνουμε την εξίσωση:

$$\frac{dT_-}{dy} = 2y - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{1-y^2} = 4 \Rightarrow 4-4y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } x = -\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως τα ακρότατα σημεία είναι $\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Υπολογίζουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για τον χαρακτηρισμό των ακροτάτων:

$$\left. \frac{d^2T_-}{dy^2} \right|_{y=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - y^2(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} \Big|_{y=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} - \frac{3}{4} \left(1-\frac{3}{4} \right)^{-\frac{3}{4}} = -6 < 0 \quad \text{Άρα}$$

τα ακρότατα σημεία είναι σημεία μεγίστου.