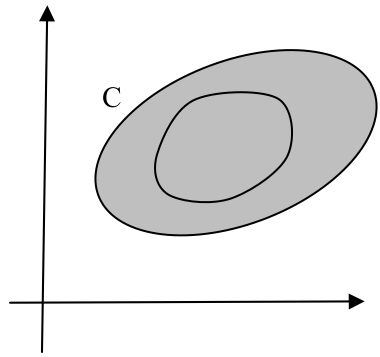
9.9 Ανεξαρτησία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την καμπύλη ολοκληρώσεως. Συνάρτηση δυναμικού

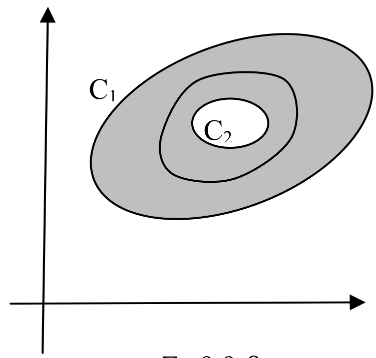
Ήδη στην παράγραφο 5.7 ασχοληθήκαμε με την ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού ενός διανυσματικού πεδίου που μας εξασφαλίζει την ανεξαρτησία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την μορφή της καμπύλης ολοκληρώσεως. Εδώ θα αναζητήσουμε με περισσότερες μαθηματικές λεπτομέρειες κάτω από ποιες συνθήκες η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και B και εξαρτάται μόνο από την θέση αυτών των σημείων. Θα ξεκινήσουμε με δυδιάστατα διανυσματικά πεδία του επιπέδου και θα γενικεύσουμε σε διανυσματικά πεδία του χώρου. Πρώτα όμως θα θυμηθούμε δυο μαθηματικές έννοιες, που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 8.

Ορισμός 1: Μια επίπεδη περιοχή D ονομάζεται **απλά συνεκτική** όταν οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη που βρίσκεται στην περιοχή D μπορεί κατά συνεχή τρόπο να συρρικνωθεί και να γίνει σημείο χωρίς να εγκαταλείψει την περιοχή D, Σχ. 9.9-α. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο της περιοχής D αποτελείται από μια κλειστή καμπύλη C που ορίζει την περιοχή.

Ορισμός 2: Μια επίπεδη περιοχή D ονομάζεται **διπλά συνεκτική** όταν δεν είναι απλά συνεκτική. Και αυτό μπορεί να συμβεί όταν η περιοχή D έχει στο εσωτερικό της μια "οπή", Σχ. 9.9-β. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνορο της περιοχής D αποτελείται από δυο κλειστές καμπύλες τις C_1 και C_2 εκ των οποίων η C_1 είναι το εξωτερικό σύνορο και η C_2 το εσωτερικό σύνορο της περιοχής D. Κατ' επέκταση ορίζουμε μια επίπεδη περιοχή D **τριπλά συνεκτική** όταν στο εσωτερικό της υπάρχουν δυο «οπές» και το σύνορο της αποτελείται από τρεις



Σχ.9.9-α



Σχ.9.9-β

απλές κλειστές καμπύλες εκ των οποίων η μια είναι το εξωτερικό σύνορο και οι δυο άλλες τα εσωτερικά σύνορα. Γενικά μπορούμε να συνεχίσουμε και να μιλάμε για **πολλαπλά συνεκτική περιοχή**.

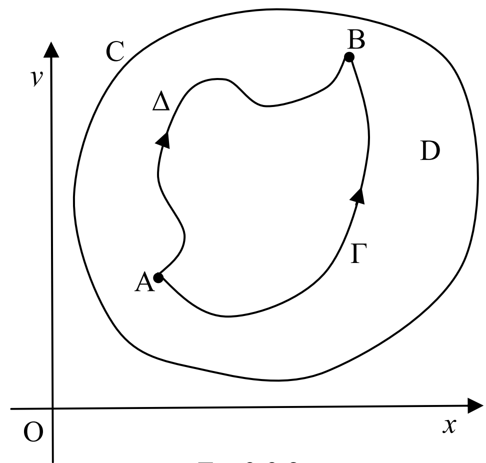
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ανεξαρτησία της ολοκλήρωσης των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων I) για επίπεδες περιοχές και II) για περιοχές του χώρου.

I) Απλά συνεκτικές επίπεδες περιοχές

Ας θεωρήσουμε την απλά συνεκτική επίπεδη περιοχή D που περιβάλλεται από την απλή κλειστή καμπύλη C (Σχ. 9.9.2) και τα σταθερά αλλά τυχαία σημεία A και B του D. Ας θεωρήσουμε επίσης το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B Pdx + Qdy$$

κατά μήκος κάποιας επίπεδης καμπύλης που συνδέει τα σημεία A και B και βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στην περιοχή D. Θα αναζητήσουμε να βρούμε τις συνθήκες εκείνες κάτω από τις οποίες η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και B και εξαρτάται μόνο από την θέση αυτών των σημείων.



Σχ. 9.9.2

Ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα 1: Έστω το συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ στην απλά συνεκτική περιοχή D, που περιβάλλεται από την απλή κλειστή γραμμή C. Τότε οι παρακάτω τέσσερεις συνθήκες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, (με την έννοια ότι η ισχύς της μιας συνθήκης συνεπάγεται την ικανοποίηση των άλλων τριών):

1) Ισχύει: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ όπου C είναι μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή D.

2) Το ολοκλήρωμα $\int_{A\ C}^{B} Pdx + Qdy$ είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη ολοκλήρωσης C που συνδέει τα, (τυχαία αλλά σταθερά), σημεία A και B και βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή D.

3) Η παράσταση $Pdx + Qdy$ είναι ολικό διαφορικό μιας, (μονότιμης) συνάρτησης $f\left(x, y\right)$ που ορίζεται στην περιοχή D, δηλαδή $df\left(x, y\right) = \dfrac{\partial P}{\partial x} dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y} dy$ ή ισοδύναμα το διανυσματικό πεδίο **F** είναι η κλίση της $f\left(x, y\right)$, δηλαδή, $\mathbf{F} = \nabla f\left(x, y\right)$.

4) Η συνθήκη $\nabla \times \mathbf{F} = \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, δηλαδή, $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$ ισχύει παντού στην περιοχή D.

Απόδειξη: Κατά την απόδειξη του θεωρήματος θα ακολουθήσουμε την λογική πορεία:

$$1 \Rightarrow\ 2 \Rightarrow\ 3 \Rightarrow\ 4 \Rightarrow\ 1$$

που σημαίνει ότι με την υπόθεση ότι ισχύει η πρώτη συνθήκη αποδεικνύουμε την δεύτερη, με την υπόθεση ότι ισχύει η δεύτερη αποδεικνύουμε την τρίτη κ.ο.κ. οπότε όταν θα έχει κλείσει ο κύκλος θα έχει αποδειχθεί η ισοδυναμία και των τεσσάρων συνθηκών.

(i) 1 $\Rightarrow$ 2: Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες καμπύλες ΑΓΒ και ΑΔΒ που βρίσκονται εξ ολοκλήρου στην περιοχή D και συνδέουν τα σημεία Α και Β. Σχηματίζεται έτσι η κλειστή καμπύλη ΑΓΒΔΑ, Σχ. 9.9.2. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε:

$$\int\limits_{\text{ΑΓΒΔΑ}} Pdx + Qdy = 0$$

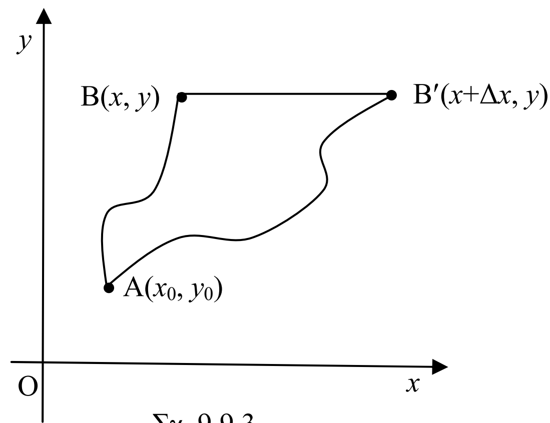
ή $\displaystyle\int\limits_{\text{ΑΓΒ}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\text{ΒΔΑ}} Pdx + Qdy = 0 \ \Rightarrow\ \int\limits_{\text{ΑΓΒ}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\text{ΑΔΒ}} Pdx + Qdy$

Επειδή όμως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή κατά μήκος των δυο τυχαίων καμπυλών ΑΓΒ και ΑΔΒ που συνδέουν τα σημεία Α και Β συνεπάγεται ότι είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη ολοκλήρωσης και η συνθήκη (2) αποδείχθηκε.

(ii)2 $\Rightarrow$ 3: Ας υποθέσουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη ολοκλήρωσης. Αν σταθεροποιήσουμε το σημείο Α, (Α=Α(x_0, y_0), όπου x_0=σταθερό, y_0=σταθερό), και αφήσουμε το Β μεταβλητό, (πάνω στο επίπεδο Oxy Σχ. 9.9.3), τότε

$$\int_{A}^{B} Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = f(x,y) \tag{9.9.1}$$

Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ως μονότιμη συνάρτηση των (x,y), δηλαδή του σημείου B. Θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f = f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη και ότι $df = Pdx + Qdy$. Θα πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχουν οι παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και ότι είναι:



Σχ. 9.9.3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y).$$

Αλλά $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ και λόγω της (9.9.1) είναι:

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$

όπου επειδή από την υπόθεση το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη ολοκληρώσεως, για το πρώτο ολοκλήρωμα ως καμπύλη ολοκλήρωσης θεωρούμε την μικτή γραμμή ABB′, (BB′ ευθεία παράλληλη προς τον άξονα Ox), ενώ για το δεύτερο ολοκλήρωμα την καμπύλη AB, Σχ. 9.9.3.

Επομένως η παραπάνω ισότητα γράφεται:

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BB'} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy$$

ή $\qquad f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \int_{x}^{x+\Delta x} Pdx$

επειδή κατά μήκος της ευθείας BB′ είναι y=σταθερό, οπότε dy=0.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής για το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης θα έχουμε:

$$f\left(x+\Delta x, y\right)-f\left(x, y\right)=\Delta x P\left(x+\theta\Delta x, y\right) \text{ όπου } \quad 0<\theta<1$$

ή
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\Delta x, y\right)-f\left(x, y\right)}{\Delta x}=\Delta P\left(x+\theta\Delta x, y\right)$$

Τελικά αν πάρουμε το όριο της τελευταίας σχέσης για $\Delta x \to 0$, επειδή η συνάρτηση $P\left(x, y\right)$ είναι συνεχής, θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0} P\left(x+\Delta x, y\right)=P\left(x, y\right)$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q\left(x, y\right)$$

και η συνθήκη (3) αποδείχθηκε.

(iii) 3 $\Rightarrow$ 4: Στην προηγούμενη περίπτωση αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $f=f\left(x, y\right)$ είναι διαφορίσιμη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αυτής και είναι συνεχείς:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P\left(x, y\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q\left(x, y\right)$$

Επομένως θα είναι: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ οπότε $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

και η συνθήκη (4) αποδείχθηκε.

(iv) 4 $\Rightarrow$ 1: Επειδή στην περιοχή D εφαρμόζεται ο τύπος του Green, θα έχουμε:

$$\oint_C P dx+Q dy=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right] dx dy$$

όπου C τυχαία κλειστή καμπύλη της D. Επειδή όμως είναι $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ θα είναι

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = 0$$

οπότε
$$\oint_C Pdx + Qdy = 0$$

και η συνθήκη (1) αποδείχθηκε.

II) Πολλαπλά συνεκτικές επίπεδες περιοχές

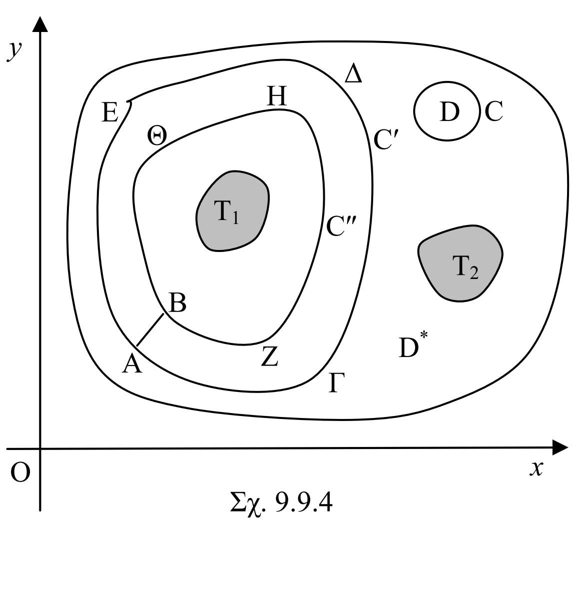
Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ και ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ ορίζονται, είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ στην πολλαπλά συνεκτική περιοχή D^* (Σχ. 9.9.4). Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει η συνθήκη $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ που είναι ισοδύναμη με την $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C της D^* που δεν περιέχει "οπή". Τότε εφαρμόζοντας τον τύπο του Green κατά μήκος αυτής της καμπύλης, έχουμε ότι:
$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης μιας πολλαπλά συνεκτικής περιοχής που δεν περιβάλλει "οπή", είναι μηδέν.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η κλειστή καμπύλη περιβάλλει μια "οπή" της περιοχής D^*.

Για τον σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε την οπή T_1 του D^* και τις κλειστές καμπύλες C'(ΑΓΔΕΑ) και C''(ΒΖΗΘΒ) που την περιβάλλουν. Τότε



Σχ. 9.9.4

σύμφωνα με την Παρατήρηση 2 της παραγράφου 9.1, έχουμε:

$$\oint_{C'} Pdx + Qdy = \oint_{C''} Pdx + Qdy = \omega \tag{9.9.2}$$

όπου $\omega \in R$.

Σ’ αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε εάν είναι $\omega \neq 0$ ή $\omega = 0$, διότι χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες για το διανυσματικό πεδίο **F**.

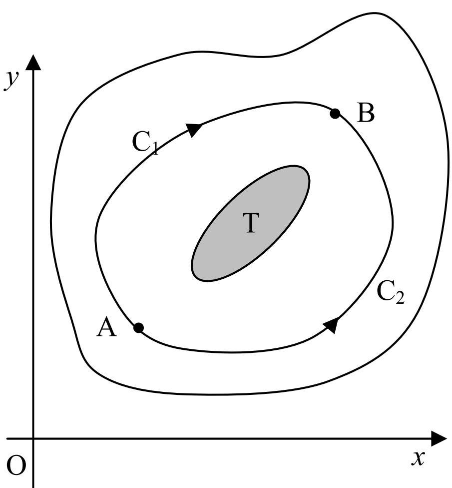
Ας υποθέσουμε ότι:

(i) $\omega \neq 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1, επειδή $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε την συνάρτηση $f = f(x, y)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$. Θα αποδείξουμε όμως ότι η συνάρτηση αυτή θα είναι πλειότιμη.

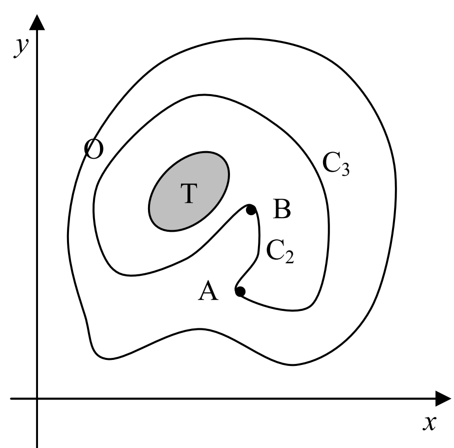
Πράγματι, ας θεωρήσουμε αυτή την συνάρτηση $f = f(x, y)$ για την οποία ισχύει:

$$\nabla f = \mathbf{F} \quad \text{ή} \quad df = Pdx + Qdy \tag{9.9.3}$$

Επίσης ας θεωρήσουμε τα σημεία A και B της περιοχής D^* και τις καμπύλες C_1 και C_2 που ενώνουν αυτά τα σημεία, έτσι ώστε η κλειστή καμπύλη που συνιστούν να περιβάλλει την "οπή" T, Σχ. 9.9.5-α. Τότε αν πάρουμε υπόψη μας την σχέση (9.9.2), θα έχουμε:



Σχ. 9.9.5-α



Σχ. 9.9.5-β

$$\int_{A\,C_2}^{B} Pdx + Qdy - \int_{A\,C_1}^{B} Pdx + Qdy = \omega$$

που με τη βοήθεια της (9.9.3) γράφεται:

$$\left[f(B)-f(A)\right]_{C_2}-\left[f(B)-f(A)\right]_{C_1}=\omega$$

ή
$$\left[f(B)\right]_{C_2}=\left[f(B)\right]_{C_1}+\omega+\left[f(A)\right]_{C_2}-\left[f(A)\right]_{C_1} \qquad (9.9.3)$$

Ας θεωρήσομε τώρα την καμπύλη C_3 που συνδέει τα σημεία A και B και συνιστά με την καμπύλη C_2 μια κλειστή καμπύλη που περιβάλλει την "οπή" T, (Σχ. 9.9.5-β). Αν εργασθούμε όπως παραπάνω παίρνουμε:

$$\left[f(B)-f\left(A\right)\right]_{C_3}-\left[f(B)-f\left(A\right)\right]_{C_2}=\omega \qquad (9.9.4)$$

Από τις (9.9.3) και (9.9.4) συνεπάγεται ότι

$$\left[f\left(B\right)\right]_{C_3}=\left[f\left(B\right)\right]_{C_1}+2\omega+\left[f\left(A\right)\right]_{C_3}-\left[f\left(A\right)\right]_{C_1} \qquad (9.9.5)$$

Αν δε υποθέσουμε ότι στο σημείο A είναι f(A)=0, οι (9.9.3) και (9.9.5) δίνουν

$$\left[f(B)\right]_{C_2}=\left[f\left(B\right)\right]_{C_1}+\omega \qquad (9.9.6)$$

και
$$\left[f(B)\right]_{C_3}=\left[f\left(B\right)\right]_{C_1}+2\omega \qquad (9.9.7)$$

Από τις σχέσεις (9.9.6) και (9.9.7) συμπεραίνουμε ότι η τιμή της "συνάρτησης" $f=f\left(x,y\right)$ στο σταθερό σημείο B εξαρτάται κάθε φορά από την καμπύλη. Επομένως, η "συνάρτηση" $f=f\left(x,y\right)$ στο σημείο B μπορεί να πάρει πολλές τιμές οι οποίες θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά kω, όπου ο ακέραιος k ισούται με τη διαφορά του αριθμού των περιστροφών γύρω από την "οπή" κατά την ορθή και την ανάδρομη φορά. Άρα η συνάρτηση $f=f\left(x,y\right)$ είναι πλειότιμη.

Παρατήρηση: Οι σχέσεις (9.9.2) και (9.9.4) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\int_{A\,C_2}^{B} Pdx+Qdy-\int_{A\,C_1}^{B} Pdx+Qdy=\omega$$

και
$$\int_{A\,C_3}^{B} Pdx+Qdy-\int_{A\,C_3}^{B} Pdx+Qdy=\omega$$

οπότε αν συνδυασθούν μεταξύ τους δίνουν:

$$\int_{A\,C_3}^{B} Pdx+Qdy-\int_{A\,C_1}^{B} Pdx+Qdy=2\omega \;\;\Rightarrow\;\; \oint_{C_1+C_3} Pdx+Qdy=2\omega$$

ή γενικότερα $$\oint_C Pdx + Qdy = k\omega$$

όπου k ακέραιος αριθμός που ορίσθηκε πιο πάνω και C κλειστή καμπύλη που περιβάλλει την "οπή"

Αν ο τόπος έχει περισσότερες «οπές» η σχέση αυτή γράφεται:

$$\oint_C Pdx + Qdy = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n$$

Επίσης τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε πιο πάνω γενικεύονται και σ' αυτές τις περιοχές.

(ii) ω=0. Στην περίπτωση αυτή παρόλο ότι δεν ισχύουν κάποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 1, (επειδή έχουμε περιοχή πολλαπλά συνεκτική), εντούτοις η συνάρτηση $f = f(x, y)$ υπάρχει και είναι μονότιμη.

Ο μηδενισμός του ω σ' αυτή την περίπτωση οφείλεται στη μορφή του διανυσματικού πεδίου **F**.

Συμπερασματικά λοιπόν έχουμε τα εξής:

Αν δοθεί το διανυσματικό πεδίο **F** που είναι συνεχώς διαφορίσιμο σ' ένα τόπο D και ισχύει $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, υπάρχει συνάρτηση $f = f(x, y)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να είναι μονότιμη ή πλειότιμη. Έτσι:

(α) Αν η περιοχή D είναι απλά συνεκτική, τότε η κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου **F** κατά μήκος κάθε κλειστής καμπύλης της D είναι μηδέν, οπότε η δυναμική συνάρτηση f είναι μονότιμη.

(β) Αν η περιοχή D είναι διπλά συνεκτική, τότε η κυκλοφορία του **F** έχει την ίδια τιμή κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης που περιβάλλει την "οπή". Η τιμή αυτή μπορεί να είναι ίση με το μηδέν ή όχι, ανάλογα με τις επί πλέον πληροφορίες που έχουμε για το **F**. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(β1) η τιμή είναι μηδέν, οπότε η f είναι μονότιμη,

(β2) η τιμή δεν είναι μηδέν, οπότε η f είναι πλειότιμη.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα συμπεράσματα αυτά ισχύουν και σε πολλαπλά συνεκτικές περιοχές.

Παραδείγματα:

1) Ως εφαρμογή της περίπτωσης (i) θα χρησιμοποιήσουμε το Παράδειγμα 2.

Όπως είδαμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ δεν ορίζεται στο σημείο Ο(0,0) του συστήματος συντεταγμένων και βρήκαμε ότι

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi \neq 0$$

όπου C κάποια κλειστή καμπύλη που περιβάλλει το σημείο Ο(0,0).

Άρα στην περίπτωση αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε μια δυναμική συνάρτηση $f = f\left(x,y\right)$ αλλά αυτή θα είναι πλειότιμη. Πράγματι είναι: $f = f\left(x,y\right) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Σε πολικές συντεταγμένες η συνάρτηση αυτή γράφεται:

$$f = f\left(r,\theta\right) = \theta$$

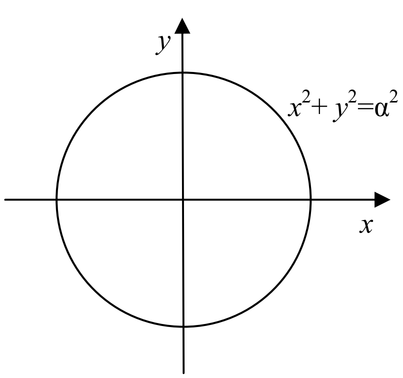
2) Ως εφαρμογή της περίπτωσης (ii) θα χρησιμοποιήσουμε το διανυσματικό πεδίο της βαρύτητας της γης σε δυο διαστάσεις:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\mathbf{j}.$$

Το πεδίο ορισμού του **F** είναι η περιοχή $D=R^2-\{(0,0)\}$ που είναι διπλά συνεκτική.

Ισχύει: $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0},\ \forall\left(x,y\right)\in D$

Επίσης αν θεωρήσουμε τον κύκλο $x^2+y^2=a^2$ Σχ. 9.9.6, τότε



Σχ. 9.9.6

$$I=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a\cos t\left(-a\sin t\right)+a\sin t a\cos t}{a^3}dt=0$$

Επομένως η συνάρτηση $f=f\left(x,y\right)$ που αντιστοιχεί στο παραπάνω πεδίο **F** θα πρέπει να είναι μονότιμη. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$f=f\left(r\right)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ που είναι μονότιμη.

9.10 Ανεξαρτησία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την καμπύλη ολοκληρώσεως στο χώρο.

Εδώ θα γενικεύσουμε τα συμπεράσματα της προηγουμένης παραγράφου στον χώρο. Πριν όμως γίνει αυτό θα αναφερθούμε για λίγο στην έννοια της απλά συνεκτικής περιοχής στο χώρο.

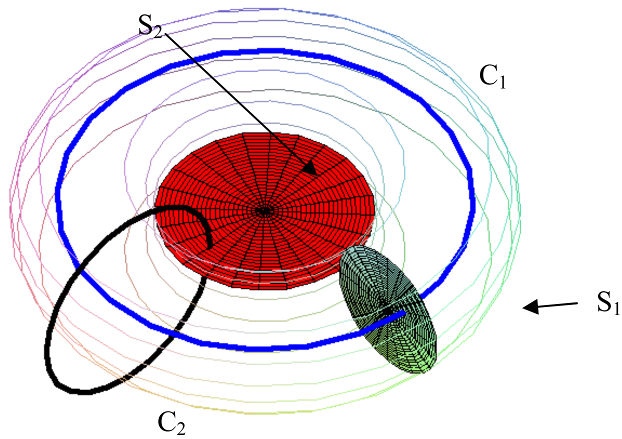
Ορισμός 1: Μια περιοχή V του R^3 ονομάζεται **απλά συνεκτική**, εάν κάθε κλειστή καμπύλη της μπορεί με συνεχή τρόπο να συρρικνωθεί σε σημείο χωρίς να εγκαταλείψει την περιοχή.

Με βάση αυτό τον ορισμό είναι φανερό ότι κάθε κλειστή καμπύλη C της απλά συνεκτικής περιοχής V είναι το πέρας, (σύνορο), μιας επιφάνειας S που ανήκει εξ' ολοκλήρου στον V.

Παραδείγματα απλά συνεκτικών τρισδιάστατων περιοχών είναι ο χώρος R^3, ο εσωτερικός και ο εξωτερικός χώρος μιας σφαίρας.

Αν η περιοχή V δεν είναι απλά συνεκτική ονομάζεται **πολλαπλά συνεκτική**. Παραδείγματα πολλαπλών συνεκτικών χώρων είναι ο χώρος R^3 από τον οποίο αφαιρέσαμε το χώρο που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός σωλήνα απείρου μήκους ή ο εσωτερικός χώρος μια σφαίρας από τον οποίο αφαιρέσαμε τον εσωτερικό χώρο ενός κυλίνδρου που τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας.

Επίσης ο εσωτερικός και ο εξωτερικός χώρος της επιφάνειας ενός τόρου, (Σχ. 9.10.1), είναι πολλαπλά συνεκτικές περιοχές γιατί οι κλειστές καμπύλες C_1 και C_2 δεν μπορούν να συρρικνωθούν κατά συνεχή τρόπο και να γίνουν σημεία χωρίς να εγκαταλείψουν τον εσωτερικό και τον εξωτερικό χώρο αντίστοιχα.



Σχ. 9.10.1

Ο εσωτερικός και ο εξωτερικός χώρος του τόρου μπορούν να γίνουν απλά συνεκτικές περιοχές αν τοποθετήσουμε τις επιφάνειες S_1 και S_2 όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1: Εάν $\mathbf{F} = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$

είναι ένα συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην κλειστή απλά συνεκτική περιοχή V, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

α) Το πεδίο **F** είναι κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου *f*.

β) $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_2$ όπου C_1 και C_2 είναι δυο οποιεσδήποτε καμπύλες με τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία και περιγραφόμενες από τις διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{r}_1(t)$ και $\mathbf{r}_2(t)$ αντίστοιχα.

γ) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ όπου C μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη.

δ) $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι ανάλογη του θεωρήματος 1 της προηγουμένης παραγράφου. Αν η περιοχή είναι πολλαπλά συνεκτική, τότε ισχύουν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα όπως στην παράγραφο 9.9.ΙΙ.