$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι λ_1=-2, λ_2=-2 και οι δυο αρνητικές, άρα το κρίσιμο σημείο (0,0) είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Εφαρμογή 6: Στο παράδειγμα 3 ο αντίστοιχος πίνακας B είναι:

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι ιδιοτιμές είναι: λ_1=1, λ_2=-1 δηλαδή ετερόσημες. Επομένως το κρίσιμο σημείο (0,0) είναι σαγματικό σημείο.

10.3 Ακρότατα υπό συνθήκες – Πολλαπλασιαστές του Lagrange

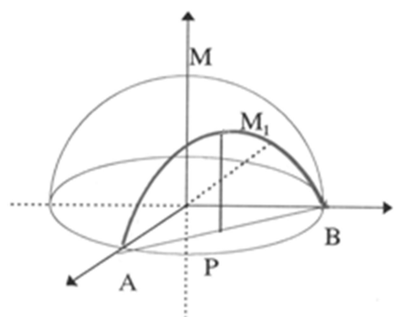
Θεωρούμε μία συνάρτηση δυο μεταβλητών $z=f(x,y)$ και μια καμπύλη C του επιπέδου OXY με εξίσωση $\varphi(x,y)=0$. Ένα σημείο P της καμπύλης C, στο οποίο η τιμή της συνάρτησης $f(x,y)$ γίνεται ακρότατη συγκριτικά με τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία της καμπύλης C, που βρίσκονται σε μία περιοχή του σημείου P, λέγεται **σημείο ακροτάτου υπό συνθήκες** της συνάρτησης $f(x,y)$.

Είναι φανερό ότι ένα σημείο ακροτάτου είναι σημείο ακροτάτου υπό συνθήκες για οποιαδήποτε καμπύλη, που διέρχεται από το σημείο αυτό. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Σαν παράδειγμα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι το άνω ημισφαίριο μιας σφαίρας, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, (Σχ. 10.3.1). Η συνάρτηση, προφανώς, έχει ένα μέγιστο στην αρχή με αντίστοιχο σημείο το M. Εάν τώρα πάρουμε σαν καμπύλη C την ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία A(1,0) και B(0,1) με εξίσωση $\varphi(x,y)=x+y-1=0$, αμέσως βλέπουμε από το σχήμα ότι για τα σημεία αυτής της ευθείας η συνάρτηση παίρνει την μέγιστη τιμή για το σημείο P(½,½), που διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα AB. Το αντίστοιχο ακρότατο της συνάρτησης είναι το σημείο M_1. Επίσης βλέπουμε ότι το σημείο M_1 δεν μπορεί να είναι ακρότατο με την συνήθη έννοια.

Για τον υπολογισμό των ακροτάτων υπό συνθήκες εργαζόμαστε ως εξής: Εάν από την εξίσωση $\varphi(x,y)=0$ της καμπύλης C μπορούμε να λύσουμε ως προς μία από τις μεταβλητές x ή y, έστω την y, τότε θα έχουμε $y=g(x)$. Στην συνάρτηση $z=f(x,y)$ αντικαθιστούμε το y με το $g(x)$ και προκύπτει μία συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής της x δηλαδή:

$$z=f(x,g(x))=\Phi(x) \tag{10.3.1}$$



Σχ. 10.3.1

Στη συνέχεια βρίσκουμε κατά τα γνωστά τις τιμές του x, για τις οποίες η $\Phi(x)$ γίνεται ακρότατη και από την εξίσωση $y=g(x)$ βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του y. Τα σημεία (x,y) είναι ακρότατα σημεία υπό συνθήκες.

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω στο προηγούμενο παράδειγμα:

$\varphi(x,y)=x+y-1=0 \ \Rightarrow \ y=1-x$ και

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-2x^2} \tag{10.3.2}$$

Εύκολα υπολογίζεται ότι το z έχει ένα μέγιστο για $x=½$ και από την $y=1-x$ έχουμε $y=½$. Επομένως το σημείο P(½,½) είναι σημείο μεγίστου υπό συνθήκες με μέγιστο:

$$z_{\max}=\sqrt{2\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}} \tag{10.3.3}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εργασθούμε εάν βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις $x=x(\mathrm{t})$, $y=y(\mathrm{t})$ της καμπύλης.

Εάν τώρα η εξίσωση $\varphi(x,y)=0$ της καμπύλης είναι πεπλεγμένη, ώστε να είναι αδύνατο να εκφράσουμε την μία μεταβλητή συναρτήσει της άλλης, τότε ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή y στην εξίσωση $z=f(x,y)$ είναι θεωρητικά[(29] συνάρτηση του x, δηλαδή $y=g(x)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση $\varphi(x,y)=\varphi(x,g(x))=0$. Τότε θα έχουμε:

[(29] Όταν λέμε ότι η y είναι θεωρητικά συνάρτηση του x, εννοούμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $y=g(x)$, για την οποία $\varphi(x,g(x))=0$. Δεν υπάρχει βέβαια κάποια γενική μέθοδος για τον προσδιορισμό της g, όπως ακριβώς δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την εύρεση των ριζών ενός πολυωνύμου n βαθμού, παρ' όλο που ξέρουμε ότι έχει n ρίζες.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{10.3.4}$$

Επίσης $\varphi(x,y)=0 \Rightarrow$

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \tag{10.3.5}$$

Από τις (10.3.4) και (10.3.5) έχουμε:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \tag{10.3.6}$$

Εάν το σημείο (x,y) είναι ακρότατο υπό συνθήκες, τότε $dz/dx=0$ και από την (10.3.6) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=0 \tag{10.3.7}$$

Η εξίσωση (10.3.7) μαζί με την εξίσωση

$$\varphi(x,y)=0 \tag{10.3.8}$$

Και όσον αφορά στα πολυώνυμα, την ύπαρξη των ριζών τους εγγυάται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Για την εξίσωση $\varphi(x,y)=0$ ένα γενικό θεώρημα: το Θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, μας καθορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι θεωρητικά δυνατή η επίλυση της εξίσωσης $\varphi(x,y)=0$ ως προς y. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το θεώρημα αυτό μας λέει ότι αν οι $\varphi(x,y)$ και $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποια περιοχή Π του σημείου (x_0,y_0) και εάν $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\neq 0$, υπάρχει θεωρητικά μια λύση της $\varphi(x,y)=0$ ως προς y σε μια κατάλληλη μικρή περιοχή γύρω από το σημείο (x_0,y_0).

αποτελούν ένα σύστημα δυο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y. Η λύση του συστήματος μας δίνει τα **ακρότατα σημεία υπό συνθήκες**. Η εξίσωση (10.3.7) μπορεί να γραφεί, με την βοήθεια μιας βοηθητικής παραμέτρου λ, υπό την μορφή:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\lambda \qquad (10.3.9)$$

από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (10.3.10)$$

που μαζί με την (10.3.8) αποτελούν ένα σύστημα τριών εξισώσεων ως προς τους αγνώστους x, y, λ. Εάν θέσουμε:

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \qquad (10.3.11)$$

τότε

$$\nabla F(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\mathbf{j} \qquad (10.3.12)$$

και συνεπώς οι εξισώσεις (10.3.10) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση:

$$\nabla F(x,y)=\mathbf{0} \qquad (10.3.13)$$

Έτσι λοιπόν όταν έχουμε να υπολογίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $z=f(x,y)$, όπου τα x και y δεσμεύονται από την συνθήκη $\varphi(x,y)=0$, θεωρούμε την έκφραση:

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση του Lagrange**, και από τις εξισώσεις:

$$\nabla F(x,y)=\mathbf{0} \quad \text{και} \quad \varphi(x,y)=0$$

υπολογίζουμε τα x και y, αφού προηγουμένως έχουμε απαλείψει την παράμετρο λ.

Η παράμετρος λ λέγεται **πολλαπλασιαστής του Lagrange** και η παραπάνω μέθοδος, **μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange**.

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών του Lagrange στην γενική της μορφή έχει ως εξής: Έστω μια συνάρτηση f, n μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ δηλαδή $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, που υπόκειται στις συνθήκες, (περιορισμούς):

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \text{ με } m<n \qquad (10.3.14)$$

Θεωρούμε το σύστημα των n+m εξισώσεων, που αποτελείται από τις m εξισώσεις (10.3.14) και από τις n εξισώσεις που παίρνουμε από την διανυσματική εξίσωση:

$$\nabla f+\lambda_1\nabla\varphi_1+\cdots+\lambda_m\nabla\varphi_m=\mathbf{0} \tag{10.3.15}$$

Εάν το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί ως προς τους m+n αγνώστους $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, x_1, \cdots, x_n$, τότε κάθε λύση $(x_1, \cdots, x_n)$ ελέγχεται για να εξακριβωθεί αν είναι σημείο ακροτάτου ή όχι. Η μέθοδος και εδώ είναι πάντα εφαρμόσιμη όταν μια τουλάχιστον από τις Ιακωβιανές ορίζουσες των m συναρτήσεων $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ ως προς m από τις μεταβλητές $x_1, \cdots, x_n$ είναι διάφορη του μηδενός. Η απόδειξη για την γενίκευση της μεθόδου του Lagrange αναγράφεται στο Κεφάλαιο 13 του βιβλίου “MathematicalAnalysis” του Tom Apostol.

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η ακρότατη τιμή της συνάρτησης $z=f(x,y)=xy$, όταν τα x και y είναι θετικά και υπακούουν την εξίσωση

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \text{ ή } \varphi(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

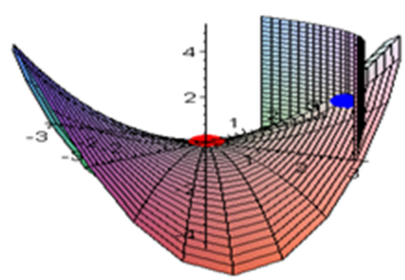
Λύση: Ακολουθώντας την μέθοδο του Lagrange έχουμε:

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)\Rightarrow$$

$$\nabla F=\frac{\partial}{\partial x}\left[xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)\right]\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left[xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)\right]\mathbf{j}=$$

$$=\left(y+\lambda\frac{x}{4}\right)\mathbf{i}+\left(x+\lambda y\right)\mathbf{j}=\mathbf{0}\Rightarrow$$

$y+\lambda(x/4)=0,\quad x+\lambda y=0$



Δι' απαλοιφής του λ έχουμε $4y^2-x^2=0$ και μαζί με την εξίσωση $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $x,y>0$, βρίσκουμε ότι $x=2$ και $y=1$ με αντίστοιχη τιμή του $z=2$.

Για να χαρακτηρίσουμε το ακρότατο σημείο $P(2,1)$ ως ελάχιστο ή μεγιστο, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2: Έστω μια συνάρτηση δυο μεταβλητών $f(x,y)$ με τον περιορισμό $\varphi(x,y)=0$. Τα ακρότατα $P(x,y)$ θα αναζητηθούν από την λύση του συστήματος

$$\nabla F(x,y)=\mathbf{0} \quad \text{και} \quad \varphi(x,y)=0 \quad \text{όπου } F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

Το σημείο P είναι:

τοπικό ελάχιστο εάν $\left[H\left(F(P)\right)\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{u}>0$

τοπικό μέγιστο εάν $\left[H\left(F(P)\right)\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{u}<0$

όπου $H\left(F(P)\right)$ η ορίζουσα Hess της συνάρτησης $F=f+\lambda\varphi$ στο σημείο P και **u** ένα οποιοδήποτε διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα της βάθμωσης της φ:

$$\mathbf{n}=\nabla\varphi(x,y)\Big|_P=\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi(P)}{\partial y}\mathbf{j}$$

Έτσι για το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$H(F)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}\end{vmatrix}$$

με $\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+\lambda\left(\dfrac{x}{4}\right)\Rightarrow\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}=\dfrac{\lambda}{4}\qquad\dfrac{\partial F}{\partial y}=x+\lambda(y)\Rightarrow\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}=\lambda$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2F}{\partial y\partial x}=1$$

Επομένως $H(F)=\begin{vmatrix}\dfrac{\lambda}{2} & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}$

Επίσης $\mathbf{n}=\nabla\varphi(P)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}\Big|_{P(2,1)}=\dfrac{x}{4}\mathbf{i}+y\mathbf{j}\Big|_{P(2,1)}=\dfrac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}$

Εάν $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$, θέλουμε:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}u_1+u_2=0 \;\Rightarrow\; u_2=-\frac{1}{2}u_1 \text{ και επομένως } \mathbf{u}=u_1\mathbf{i}-\frac{1}{2}u_1\mathbf{j}$$

Επίσης από τις σχέσεις $y+\lambda\dfrac{x}{4}=0,\; x+\lambda y=0$ και για το σημείο P(2,1) βρίσκουμε λ=-2.

Έχουμε:

$$H\left(F(P)\right)\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda}{4} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ -\dfrac{1}{2}u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}u_1-\dfrac{1}{2}u_1\\ u_1+u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u_1\\ 2u_1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left[H\left(F(P)\right)\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{u}=\left(-u_1\mathbf{i}+2u_1\mathbf{j}\right)\cdot\left(u_1\mathbf{i}-\frac{1}{2}u_1\mathbf{j}\right)=-u_1^{\,2}-u_1^{\,2}=-2u_1^{\,2}<0 \quad \forall u_1^{\,2}$$

δηλαδή για κάθε διάνυσμα **u**. Επομένως το υπό συνθήκες ακρότατο σημείο P(2,1) είναι μέγιστο.

Παράδειγμα 2: Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f\left(x,y\right)=y^2$ με την συνθήκη

$$\varphi\left(x,y\right)=x^2+2y^2-4x+12y+21=0\,.$$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F=f+\lambda\varphi=y^2+\lambda\left(x^2+2y^2-4x+12y+21\right)$$

και λύνουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2\lambda x-4\lambda=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+4\lambda y+12\lambda=0 \qquad (2)$$

$$x^2+2y^2-4x+12y+21=0 \qquad (3)$$

Από την (1) έχουμε λ=0 ή x=2.

Για λ=0 από την (2) προκύπτει y=0, οπότε η (3) δίνει

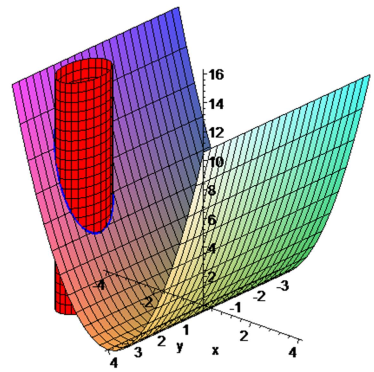
$$x^2-4x+21=0$$

Αλλά το τριώνυμο αυτό δεν έχει πραγματικές ρίζες, διότι η διακρίνουσα του είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 21 = -68 < 0$.

Για x=2 η (3) μας δίνει:

$$2^2 + 2y^2 - 4 \cdot 2 + 12y + 21 = 0 \;\Rightarrow$$

$$2y^2 + 12y + 17 = 0 \;\Rightarrow\; y = -3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Οπότε τα ακρότατα σημεία είναι:

$$P_1\left(2, -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\; P_2\left(2, -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Η ορίζουσα Hess της F είναι:

$$H(F) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 4\lambda \end{vmatrix}$$

Για τα σημεία P_1, P_2 έχουμε:

$$\mathbf{n} = \nabla\varphi(P) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}\Big|_{P_{1,2}} = (2x-4)\mathbf{i} + (4y+12)\mathbf{j}\Big|_{P_{1,2}} =$$

$$= (2 \cdot 2 - 4)\mathbf{i} + \left(4\left(-3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 12\right)\mathbf{j} = \pm 2\sqrt{2}\mathbf{j}$$

Έστω $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ διάνυσμα κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Θα είναι:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (\pm 2\sqrt{2}\mathbf{j}) = \pm u_2 2\sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = 0$$

Άρα $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}$

Στη συνέχεια

$$H(F(P))\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\lambda u_1 \mathbf{i}$$

και $$\left[H(F(P))\mathbf{u}\right] \cdot \mathbf{u} = (2\lambda u_1\mathbf{i}) \cdot (u_1\mathbf{i}) = 2\lambda u_1^2$$

Αλλά από την (2) προκύπτει $\lambda = -\dfrac{2y}{4y+12} = -\dfrac{y}{2(y+3)}$

οπότε η τιμή του λ για το σημείο P_1 είναι

$$\lambda_1 = -\frac{-3+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\left(-3+\frac{\sqrt{2}}{2}+3\right)} = \frac{3-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} > 0$$

Επομένως για το σημείο P_1 ισχύει:

$$\left[H\left(F(P)\right)\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{u} = 2\lambda u_1^2 > 0 \text{ για κάθε } u_1.$$

οπότε το σημείο P_1 είναι σημείο ελαχίστου, η δε αντίστοιχη τιμή της f είναι

$$f\left(P_1\right) = y^2 = \left(-3+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

Η τιμή του λ για το σημείο P_2 είναι

$$\lambda_2 = -\frac{-3-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\left(-3-\frac{\sqrt{2}}{2}+3\right)} = -\frac{3+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} < 0$$

οπότε το σημείο P_2 είναι σημείο μεγίστου, η δε αντίστοιχη τιμή της f είναι

$$f\left(P_2\right) = y^2 = \left(-3-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

10.4 Μερικές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις

Έστω μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ ορισμένη σε μια περιοχή U του επιπέδου OXY. Τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$ μπορούν να υπάρξουν μόνο σε:

α) εσωτερικά σημεία της περιοχής U, όπου μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι, δηλαδή $\partial f/\partial x=0$, $\partial f/\partial y=0$,

β) σε οριακά σημεία της U, δηλαδή στο σύνορο της U.

Το παράδειγμα που ακολουθεί θα διασαφηνίσει τα παραπάνω.