ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 1 : Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός
Αντιστοιχεί στα
(α) Κεφάλαιο 2 των Serway /Moses/Moyer [Ενότητες 2.1-2.6]
(β) Κεφάλαιο 3 του Krane [Ενότητες 3.1-3.4 και 3.6]

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

I. Ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος

Πρόβλημα 1. Ανάβουμε στο μέγιστο το μεγάλο μάτι της κουζίνας μας. Θεωρώντας ότι αυτό απαιτεί ισχύ λειτουργίας της τάξεως του 1kW, και ότι έχει ακτίνα r~10cm, υπολογίστε τη θερμοκρασία του θεωρώντας το ως μέλαν σώμα. Δίδεται η σταθερά Stefan-Boltzmann $\sigma=5{,}67\text{x}10^{-8}$ W/m^{2}K^4. [Απ. 592 ^{0}C]
Πρόβλημα 2. Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck μεταπίπτει στην αντίστοιχη των Rayleigh-Jeans για $T\to\infty$. Αναρωτηθείτε τι μπορεί να σημαίνει αυτό. [Υπόδειξη: Σκεφθείτε τις ενεργειακές διαφορές στον αρμονικό ταλαντωτή καθώς $T\to\infty$.]
Πρόβλημα 3. Επικαλεστείτε την έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck για να δείξετε ότι για $T_2>T_1$ ισχύει ότι

$$\rho(f, T_2) > \rho(f, T_1)$$

για κάθε συχνότητα f.
Αυτό υποδηλώνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων κατανομών για δύο διαφορετικές θερμοκρασίες δεν τέμνονται πουθενά. Εκείνη που αντιστοιχεί στο θερμότερο σώμα είναι παντού ψηλότερη από αυτήν που αντιστοιχεί στο ψυχρότερο. Το θεωρείτε εύλογο;
Πρόβλημα 4. Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck ικανοποιεί τον νόμο των Stefan-Boltzmann. Θεωρείστε γνωστό το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Από εδώ αναδεικνύεται και η εξάρτηση της σταθεράς Stefan-Boltzmann από τις θεμελιώδεις σταθερές h και c:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3}$$

Επαληθεύστε την τιμή της.
Πρόβλημα 5. A. Η επιφάνεια του Ήλιου έχει θερμοκρασία περίπου 6000 K. Σε ποιο μήκος κύματος εκπέμπει ο Ήλιος την μέγιστη ένταση του; Πως συγκρίνεται αυτό με την μέγιστη ευαισθησία του ανθρώπινου οφθαλμού; [Απ. 483nm]
B. (α) Υποθέτοντας ότι ο Ήλιος ακτινοβολεί σαν ιδανικό μέλαν σώμα σε θερμοκρασία 6000 K, ποια είναι η ισχύς ανά μονάδα επιφανείας της ηλιακής ακτινοβολίας που εκπέμπεται στην περιοχή από 550,0 nm έως 552,0 nm; (β) Ποιο κλάσμα της συνολικής ηλιακής ακτινοβολίας αντιπροσωπεύει αυτή η τιμή; [Απ. (α) $1{,}9\text{x}10^5$ W/m^2 (β) 0,26%]

Πρόβλημα 6. Για ένα μέλαν σώμα, η ακτινοβολούμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας είναι 1.440×10^{-7} W / m^2 σε ένα εύρος 0,00833 cm γύρω από ένα μήκος κύματος 0,133 cm. Ποια είναι η θερμοκρασία του μέλανος αυτού σώματος; [Απ. 2,724 K]

Πρόβλημα 7. **Α.** Ξεκινώντας από την έκφραση του Planck για την φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας συναρτήσει του μήκους κύματος ενός μέλανος σώματος ρ(λ,Τ), να εξάγετε την έκφραση που δίνει τις μεταβολές της $\Delta\rho_\lambda(T)$ για μεταβολές της θερμοκρασίας ΔΤ σε δεδομένο μήκος κύματος.

[Υπόδειξη: $\Delta\rho_\lambda(T) = \frac{d\rho_\lambda(T)}{dT}\Delta T$] [Απ. $\Delta\rho_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{e^{hc/\lambda k_B T}}{\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)^2}\frac{hc}{\lambda k_B T^2}\Delta T$]

Β. Εφαρμογή στην ανίχνευση της ακτινοβολίας υποβάθρου. Η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου που ανιχνεύεται στο Σύμπαν ακολουθεί φασματική κατανομή μέλανος σώματος σε θερμοκρασία 2,725 K (~2,73K !!!) και θεωρείται ότι αποτελεί κατάλοιπο της «μεγάλης έκρηξης» που το δημιούργησε αντιστοιχιζόμενη στην συνεχή ψύξη του. Βρίσκεται δε στην μικροκυματική περιοχή του Η/Μ φάσματος. Ακριβείς μετρήσεις που έγιναν από τον δορυφόρο WMAP που εκτοξεύτηκε το 2001 διέγνωσαν μικρές θερμοκρασιακές διακυμάνσεις της τάξεως των $2\text{x}10^{-5}$K περί την γενικά αποδεκτή θερμοκρασία των 2,725K. Αυτές αποδόθηκαν στην ύπαρξη περιοχών του πρώιμου σύμπαντος με διαφορετικές πυκνότητες. Ποια είναι η διαφορά στη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας, γύρω από το μέγιστό της, μεταξύ των «θερμών» και «ψυχρών» περιοχών της ακτινοβολίας υποβάθρου;
[Απ. $7{,}1\text{x}10^{-8}$ W/m^3]

Πρόβλημα 8. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος του οποίου η φασματική κατανομή της αφετικής του ικανότητας σε μήκος κύματος 200nm είναι 3,82 φορές την αντίστοιχη στα 400nm. [Απ. 18.000 K]

[Υπόδειξη: Θα πρέπει να καταλήξετε στην έκφραση $\frac{e^{\frac{35987}{T}}-1}{e^{\frac{71974}{T}}-1} = (3{,}82)(0{,}5)^5 = 0{,}1194$. Θέσατε $e^{\frac{35987}{T}} = x$. Θα πρέπει να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}1194$ και από εκεί να βρείτε το Τ.]

• **Πρόβλημα 9.** Κατά την ανάλυση της έκφρασης του Planck για τη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος εμφανίζεται ο όρος:

$$\zeta = e^{-\frac{hf}{k_BT}} + e^{-\frac{2hf}{k_BT}} + e^{-\frac{3hf}{k_BT}} + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nhf}{k_BT}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta hf}, \quad \beta = \frac{1}{k_BT}$$

Να αποδείξετε ότι όντως

$$-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_BT}}-1}$$

θεωρώντας γνωστό το ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-a}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-a}} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-na} = \frac{e^{-a}}{\left(1-e^{-a}\right)^2}$$

Καταλαβαίνετε τώρα καλύτερα γιατί εξεπλάγει μάλλον ο Planck; Εξηγήστε.

ΙΙ. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

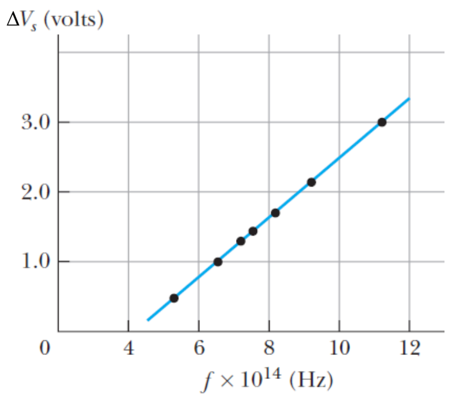
Πρόβλημα 10. Θεωρείστε τα μέταλλα λίθιο, βηρύλλιο και υδράργυρο, που έχουν έργα εξόδου 2,3 eV, 3,9 eV, και 4,5 eV αντίστοιχα. Αν ακτινοβολία μήκους κύματος 300 nm προσπέσει σε καθένα από αυτά τα μέταλλα προσδιορίστε (α) ποια θα εμφανίσουν φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και (β) τη μέγιστη κινητική ενέργεια (σε eV) των εκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων.
[Απ. (α) Δύο από αυτά (β) 1,83eV και 0,23 eV]

Πρόβλημα 11. Φως μήκους κύματος 500 nm προσπίπτει σε μεταλλική επιφάνεια. Εάν η διαφορά δυναμικού αποκοπής για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι 0,45 V, βρείτε: (α) τη μέγιστη ενέργεια των εκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων (β) το έργο εξόδου του μετάλλου και (γ) το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκοπής για το φαινόμενο στο συγκεκριμένο μέταλλο.
[Απ. (α) 0,45eV (β) 2,03 eV (γ) 612 nm]

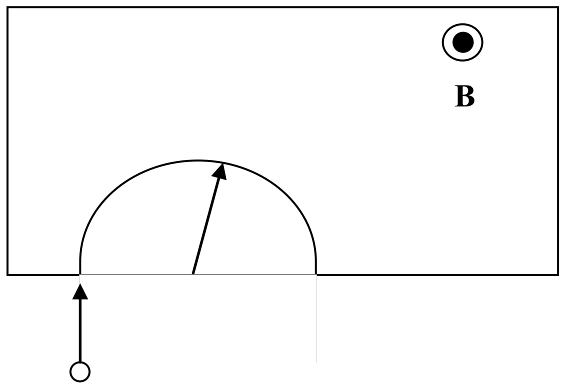
Πρόβλημα 12. Μια φωτεινή πηγή μήκους κύματος λ φωτίζει ένα μέταλλο που εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια με μέγιστη κινητική ενέργεια 1,00 eV. Μια δεύτερη πηγή μήκους κύματος λ/2 οδηγεί σε εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από το ίδιο μέταλλο με μέγιστη κινητική ενέργεια 4,00 eV. Ποιο είναι το έργο εξόδου του μετάλλου;
[Απ. 2eV]

Πρόβλημα 13. Όταν το μεταλλικό νάτριο φωτίζεται με φως μήκους κύματος $4{,}20\times10^2$ nm, η διαφορά δυναμικού αποκοπής του φωτοηλεκτρικού φαινομένου βρίσκεται 0,65 V. Όταν το μήκος κύματος αλλάζει σε $3{,}10\times 10^2$ nm, βρίσκεται ίση προς 1,69 V. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτά τα δεδομένα και τις τιμές της ταχύτητας του φωτός και του ηλεκτρονιακού φορτίου, βρείτε (α) μια τιμή για τη σταθερά του Planck και (β) το έργο εξόδου του νατρίου.
[Απ. (α) $4{,}10\text{x}10^{-15}$ eV/s, (β) 2,28eV]

Πρόβλημα 14. Το σχήμα δείχνει τη διαφορά δυναμικού αποκοπής συναρτήσει της συχνότητας των προσπίπτοντων φωτονίων για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο στο νάτριο. Χρησιμοποιήστε αυτά τα δεδομένα για να βρείτε (α) το έργο εξόδου του μετάλλου (β) τον λόγο h/q_e . Βρείτε την επι τοις εκατό διαφορά του υπολογισμού σας από την γενικώς αποδεκτή τιμή. (γ) το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα αποκοπής του φαινομένου. (Δεδομένα από την πρωτότυπη εργασία του R. A. Millikan, Phys. Rev. 7: 362, 1916.)
[Απ. (α) 1,6eV (β) $4\text{x}10^{-15}$ Vs, 3% (γ) 775 nm]



Πρόβλημα 15. Φωτόνια μήκους κύματος 450 nm προσπίπτουν σε μέταλλο. Τα πιο ενεργητικά ηλεκτρόνια που εκτοξεύονται από το μέταλλο εισέρχονται στο χώρο ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής $2{,}0\text{x}\ 10^{-5}$ T σε διεύθυνση κάθετη προς τις δυναμικές γραμμές του. Εκεί κάμπτονται σε ένα κυκλικό τόξο ακτίνας 20 cm. Ποιο είναι το έργο εξόδου του μετάλλου; [Απ. 1,35eV]



III. Φωτόνια

Πρόβλημα 16. Υπολογίστε την ενέργεια σε eV και το μήκος κύματος σε m ενός φωτονίου που έχει συχνότητα (α) $5\text{x}10^{14}$ Hz, (β) 10 GHz, (γ) 30 MHz. Σε ποια περιοχή του φάσματος ανήκουν οι παραπάνω συχνότητες; Σε ποια περιοχή θα δεχόσασταν πιο εύκολα ένα φωτόνιο ως σωματίδιο;
[Απ. (α) 2,07eV, 600nm (β) $4{,}14\text{x}10^{-5}$ eV, 0,03m (γ) $1{,}24\text{x}10^{-7}$ eV, 10m]

Πρόβλημα 17. (α) Ένας ραδιοφωνικός σταθμός FM έχει ισχύ εξόδου 100kW και λειτουργεί σε συχνότητα εκπομπής 94 MHz. Πόσα φωτόνια ανά δευτερόλεπτο εκπέμπει ο πομπός;
(β) Επαναλάβατε τον υπολογισμό για μια τυπική πηγή ακτίνων X (συσκευή XRD) με ισχύ εξόδου 40kW που εκπέμπει ακτινοβολία συχνότητας $3x10^{20}$Hz.
Φανταστείτε ότι ένας ανιχνευτής μπορεί να ανιχνεύσει και τις δύο ακτινοβολίες. Πως θα φαινόταν η λαμβανόμενη ακτινοβολία στην πρώτη περίπτωση (θα μπορούσε να ανιχνεύσει ως διακριτά σωματίδια τέτοιο πλήθος φωτονίων;) και πως στη δεύτερη; Μήπως το πλήθος των εκπεμπόμενων φωτονίων καθορίζει την κυματική-σωματιδιακή φύση της Η/Μ ακτινοβολίας; Συνδυάστε της σκέψεις σας με αυτές του προηγούμενου προβλήματος….
[Απ. (α) $1{,}6x10^{30}$ φωτόνια/s (β) $2x10^{17}$ φωτόνια/s]

•**Πρόβλημα 18.** Θεωρείστε ότι ένας αστέρας είναι τόσο βαρύς (μεγάλος λόγος M_S/R_S >>>1) που ακόμη και σε άπειρη απόσταση από αυτόν το απομακρυνόμενο φωτόνιο υφίσταται την βαρυτική του έλξη. Αποδείξτε τότε ότι η συχνότητά του f ’ στο ∞ συνδέεται με αυτή στην επιφάνεια του αστέρα f με τη σχέση:

$$f' = fe^{-\frac{GM_S}{R_S c^2}}$$

Θεωρείστε ότι η μεταβολή στην ενέργεια hdf του απομακρυνόμενου κατά dr από την επιφάνεια του αστέρα φωτονίου, ισούται με το απαιτούμενο έργο για την υπερνίκηση της βαρυτικής έλξης $F_G dr$.
Που μεταπίπτει η παραπάνω σχέση για M_S/R_S<<<1;

IV. Φαινόμενο Compton

Στα παρακάτω προβλήματα ανατρέξτε στο σχήμα που επεδείχθει στο μάθημα.

Πρόβλημα 19. Να αποδείξετε ότι κατά τη σκέδαση Compton φωτονίου από ακίνητο πρακτικά ηλεκτρόνιο, οι γωνίες σκέδασης των δύο σωματιδίων συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan\varphi = \frac{f'\sin\theta}{f - f'\cos\theta} = \frac{\lambda\sin\theta}{\lambda' - \lambda\cos\theta}$$

Πρόβλημα 20. Σε ένα πείραμα Compton τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν μήκος κύματος:

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{2}$$

και κάποια από αυτά ανιχνεύονται από έναν μετρητή που έχει τοποθετηθεί σε γωνία 60^0 ως προς την κατεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης.Να υπολογιστούν:
(α) Το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου καθώς και η ορμή και η ενέργειά του.
(β) Η ορμή, η ενέργεια και η γωνία σκέδασης του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου.
Τα αποτελέσματα να εκφραστούν συναρτήσει της μάζας του ηλεκτρονίου και θεμελιωδών φυσικών σταθερών.
[Απ. (α) λ’=λc, $p_{ph}' = m_{0e}c$, $E_{ph}' = m_{0e}c^2$ (β) $E_e' = 2m_{0e}c^2$, $p_e' = (3)^{1/2} m_{0e}c$, $\varphi = 30^0$]

•• **Πρόβλημα 21. (Βιβλίο Α. Ζδέτση- Πρόβλημα 6.9).** Ας θεωρήσουμε ξανά την σκέδαση Compton, αλλά αυτή τη φορά με το ηλεκτρόνιο να μην θεωρείται τελείως ακίνητο, αλλά να έχει ορμή μέτρου p_e κινούμενο στην ίδια κατεύθυνση με αυτή του προσπίπτοντος φωτονίου (κατά τη θετική φορά του άξονα X).
α) Γράψτε εκ νέου τις εξισώσεις για την διατήρηση ενέργειας και ορμής σ΄ αυτή την περίπτωση.
β) Δείξτε ότι η έκφραση της αλλαγής του μήκους κύματος του φωτονίου θα είναι τώρα:

$$\Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_e}{\sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2} - p_e}(1 - \cos\theta)$$