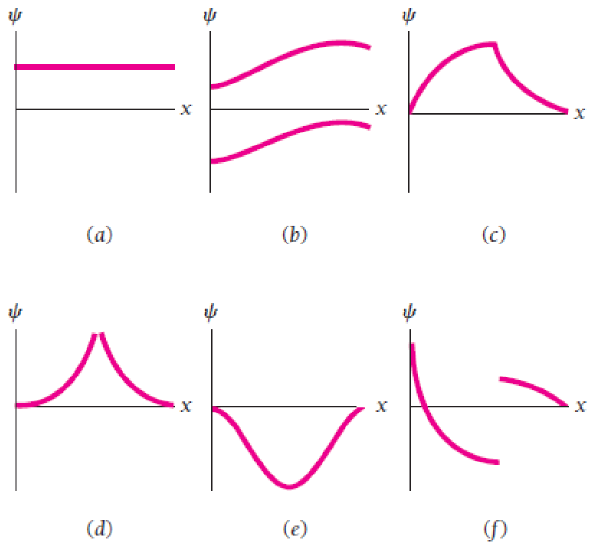
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 5 : Η εξίσωση Schrödinger και η επίλυσή της σε απλά κβαντικά συστήματα
Αντιστοιχεί στις σημειώσεις του μαθήματος (Ενότητα 5)

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

I. Ιδιότητες της εξίσωσης Schrödinger- Στάσιμες καταστάσεις και καταστάσεις επαλληλίας

Πρόβλημα 1. Ποιες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις ψ(x) δεν είναι φυσικά αποδεκτές ως λύσεις της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger και γιατί;



Πρόβλημα 2. Ποιες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις ψ(x) δεν είναι φυσικά αποδεκτές ως λύσεις της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger και γιατί;

$$\psi_1(x) = Ae^{-ax}\ ,\ \psi_2(x) = Ae^{ax}\ ,\ \psi_3(x) = Ae^{-a|x|}\ ,\ \psi_4(x) = Axe^{-ax^2}\ ,\ \psi_5(x) = \frac{Ax}{\sqrt{x^2+a^2}}\ ,$$

$$\psi_6(x) = Ae^{-|x|}\sin x\ ,\ \psi_7(x) = \frac{A}{\cosh ax}$$ όπου A και a θετικές σταθερές.

[Απ. Οι 1, 2, 5]

Πρόβλημα 3. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο πεδίο δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \alpha^2 x^2,\ \alpha = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Εάν η κατάστασή του περιγάφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}x^2\right)$$

που είναι λύση της αντίστοιχης χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger, να υπολογιστεί η ενέργειά του. [Απ. $E = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{2m}}$]

●**Πρόβλημα 4.** Θεωρείστε ότι η κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-\frac{x}{x_0}}, \quad n \; \kappa\alpha\iota \; x_0 \; \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

αντιστοιχεί σε δέσμια κατάσταση ενός σωματιδίου μάζας m σε πεδίο δυναμικής ενέργειας U(x), τέτοιου ώστε U(∞)=0. Να υπολογιστεί η ενέργεια του σωματιδίου και η έκφραση του U(x).

[Απ. $E = -\dfrac{\hbar^2}{2mx_0^2}$, $U(x) = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{n(n-1)}{x^2} - \dfrac{2n}{xx_0}\right]$]

Πρόβλημα 5. (α) Να υπολογιστεί η σταθερά A έτσι ώστε η συνάρτηση

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}, \; A \; \kappa\alpha\iota \; \alpha \; \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

να αποτελεί φυσικά παραδεκτή λύση της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης και η αβεβαιότητα θέσης για σωματίδιο μάζας m, η κατάσταση του οποίου σε μία δεδομένη χρονική στιγμή περιγράφεται από την παραπάνω κυματοσυνάρτηση.

Δίδονται τα ολοκληρώματα: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \dfrac{\pi}{a}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

[Απ. (α) $A = \left(\dfrac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ (β) $<x>=0$, $(\Delta x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$]

Πρόβλημα 6. Η κυματοσυνάρτηση (λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger) ενός σωματιδίου δίνεται από την έκφραση:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ce^{-x}(1 - e^{-x}), & x > 0 \end{cases}$$

όπου το x μετράται σε nm.
(α) Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς C.
(β) Ποια είναι η πιθανότερη τιμή της θέσης στην οποία μπορεί να βρεθεί το σωματίδιο κατά την διάρκεια σχετικής μέτρησης;
(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β).

Δίδεται το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} xe^{-ax} dx = \dfrac{1}{a^2}$

[Απ. (α) $C = \sqrt{12}\; nm^{-\frac{1}{2}}$ (β) $x_p = \ln 2\; nm = 0{,}693 nm$ (γ) $<x> = \dfrac{13}{12} nm = 1{,}083 nm$]

Πρόβλημα 7. (α) Να υπολογιστεί η σταθερά A έτσι ώστε η συνάρτηση

$$\psi(x) = Axe^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}, \; A \; \kappa\alpha\iota \; \alpha \; \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

να αποτελεί φυσικά παραδεκτή λύση της (χρονικά ανεξάρτητης) εξίσωσης Schrödinger.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης και η αβεβαιότητα θέσης για σωματίδιο μάζας m, η κατάσταση του οποίου σε μία δεδομένη χρονική στιγμή περιγράφεται από την παραπάνω κυματοσυνάρτηση.
(γ) Στη γειτονιά ποιών σημείων είναι πιθανότερο να βρεθεί το σωματίδιο σε μία μέτρηση της θέσης;

Δίδονται τα ολοκληρώματα: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \dfrac{3}{4a^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

[Απ. (α) $A = \sqrt{\dfrac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}}$ (β) $<x>=0$, $(\Delta x) = \sqrt{\dfrac{3}{2\alpha}}$ (γ) $x_p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$]

Πρόβλημα 8. Η κατάσταση ενός σωματιδίου περιγράφεται σε μία ορισμένη χρονική στιγμή από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(x)$$

όπου $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ λύσεις της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger απεικονίζοντας στάσιμες καταστάσεις με ενέργειες $E_1=3$ και $E_2=6$ (αυθαίρετες μονάδες ενέργειας) αντίστοιχα.
(α) Ποιες είναι οι πιθανότητες μία μέτρηση της ενέργειας να δώσει για την κατάσταση επαλληλίας $\psi(x)$ τις τιμές E_1 και E_2 ;
(β) Υπολογίστε την μέση ενέργεια και την αβεβαιότητα ενέργειας του σωματιδίου στην κατάσταση επαλληλίας $\psi(x)$.
[Απ. (β) $(\Delta E) = \sqrt{2}$]

ΙΙ. Δέσμιες καταστάσεις-Σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας.

Πρόβλημα 9. Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας, να αποδειχθεί ότι για την κατάσταση που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi_n(x)$:

$$< x >= \frac{L}{2}, \quad < x^2 >= \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2}$$

Πρόβλημα 10. Ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας εκτείνεται από –L/2 έως L/2 , δηλαδή:

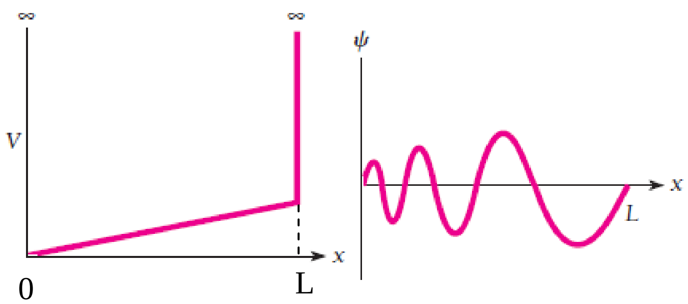
$$U(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα της διαπραγμάτευσης του προβλήματος στο απειρόβαθο πηγάδι

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le L \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράψτε την μορφή των τριών πρώτων κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων που περιγράφουν την κατάσταση του σωματιδίου.
[Απ. $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$, $\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$, $\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$]

Πρόβλημα 11. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο τροποποιημένο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας του σχήματος. Μία από τις κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν την κατάσταση του σωματιδίου εντός του πηγαδιού εικονίζεται στο σχήμα. Να εξηγηθεί η μορφή της. Λάβετε υπόψιν ότι το μήκος κύματος της κυματοσυνάρτησης ισοδυναμεί με το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου.



Πρόβλημα 12. Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας, η κατάσταση του σωματιδίου περιγράφεται από την επαλληλία των κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων (λύσεων της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger) $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ (θεμελιώδης και πρώτη διεγερμένη αντίστοιχα):

$$\psi(x) = C\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right]$$

(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά C, έτσι ώστε η $\psi(x)$ να είναι επίσης φυσικά αποδεκτή λύση της χρονικά ανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger.
(β) Να βρεθεί η έκφραση της κυματοσυνάρτησης $\Psi(x,t)$ που εμπεριέχει την χρονική εξέλιξη της κατάστασης του σωματιδίου.
(γ) Να προσδιοριστεί η μέση ενέργεια του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση επαλληλίας.
• (δ) **(Προαιρετικό)** Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή της θέσης του σωματιδίου σε αυτή την κατάσταση επαλληλίας δίδεται από την σχέση:

$$< x >= \frac{1}{2}\int x|\psi_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int x|\psi_2|^2 dx + \cos(\Omega t)\int x\psi_1^*\psi_2 dx = \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\cos(\Omega t),\ \ \Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}$$

Τι παρατηρείτε;

[Απ. (α) $C = \frac{1}{2}$ (β) $< E >= \frac{E_1 + E_2}{2}$]

III. Δέσμιες καταστάσεις- Ο κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής.

Πρόβλημα 13. (α) Να κατασκευαστεί η κυματοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (n=1) κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.
(β) Να βρεθεί η έκφραση της κυματοσυνάρτησης $\Psi_1(x,t)$ που εμπεριέχει την χρονική εξέλιξη της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (n=1) κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή.
(γ) Ποια είναι η πιθανότερη τιμή της θέσης του ταλαντωτή στην κατάσταση n=1 κατά την διάρκεια σχετικής μέτρησης;
(δ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της θέσης του ταλαντωτή στην κατάσταση n=1 και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ).

[Απ. (α) $\psi_1(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}(2\alpha)^{\frac{1}{2}}xe^{-\frac{ax^2}{2}} = \left(\frac{m^3\omega^3}{\hbar^3\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}xe^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$, $a = \frac{m\omega}{\hbar}$ (γ) $x_p = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$,
(δ) $< x >= 0$]

Πρόβλημα 14. Ένας κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να βρεθεί εκτός των κλασικών ορίων κίνησής του.
Υπενθυμίζεται ότι τα κλασικά όρια κίνησης κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή αντιστοιχούν σε κλασικό ταλαντωτή με ενέργεια ίση με την αντίστοιχη του κβαντικού σε κάθε κατάστασή του. Έτσι για τη θεμελιώδη κατάσταση του κβαντικού ταλαντωτή τα αντίστοιχα κλασικά όρια κίνησης είναι $\pm A = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (γιατί;)

Δίδεται το ολοκλήρωμα : $\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + ...$

[Απ. $\wp(x < -A,\ x > A) = 1 - \wp(-A \le x \le A) \approx 0{,}16 = 16\%$]

Πρόβλημα 15. Ένα σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο πεδίο δυναμικής ενέργειας

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cx,\ k = m\omega^2,\ c = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

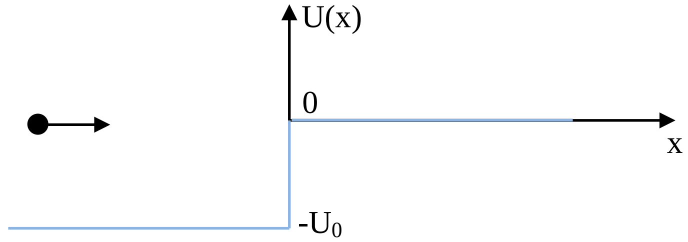
(τροποποιημένος αρμονικός ταλαντωτής). Να βρεθεί το ενεργειακό του φάσμα.

[Υπόδειξη: Θέσατε $x' = x + \frac{c}{k}$] [Απ. $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{c^2}{2k}$, $n = 1, 2, 3...$]

IV. Καταστάσεις σκέδασης και φαινόμενα σήραγγος.

Πρόβλημα 16. Σωμάτιο μάζας m κινείται έχοντας ενέργεια E στο πεδίο δυναμικής ενέργειας του σχήματος:

$$U(x)=\begin{cases}-U_0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

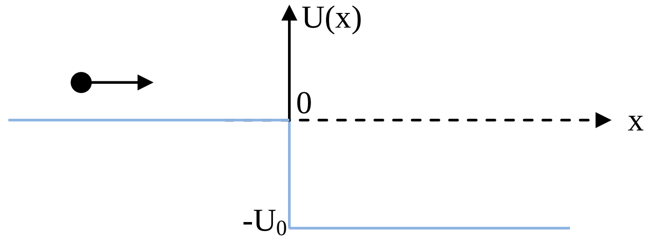


Να υπολογιστεί η πιθανότητα ανάκλασης και διέλευσής του από το σκαλοπάτι έάν:
(α) E > 0
(β) -U_0< E < 0

[Απ. (α) $R=\dfrac{U_0^2}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^4}$, $T=\dfrac{4\sqrt{E(E+U_0)}}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^2}$ (β) $R=1,\ T=0$]

Πρόβλημα 17. Σωμάτιο μάζας m κινείται έχοντας ενέργεια E στο πεδίο δυναμικής ενέργειας του σχήματος:

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -U_0, & x>0\end{cases}$$



Να υπολογιστεί η πιθανότητα ανάκλασής του στο σκαλοπάτι. Αριθμητική εφαρμογή για E=4eV και U_0=5eV.

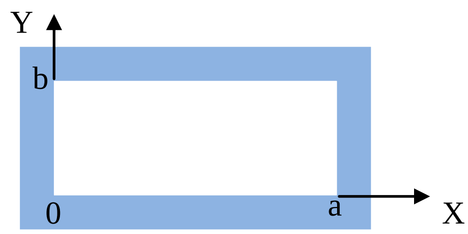
[Απ. $R=\dfrac{U_0^2}{\left(\sqrt{E+U_0}+\sqrt{E}\right)^4}=\dfrac{1}{25}$]

V. Διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα-εκφυλισμός.

Πρόβλημα 18. Σωματίδιο βρίσκεται σε τριδιάστατο απειρόβαθο κιβώτιο δυναμικής ενέργειας διαστάσεων L. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί σε μία μέτρηση της θέσης στο διάστημα 0 ≤ x,y,z ≤ L/4 όταν βρίσκεται στη θεμελιώδη ενεργειακή του κατάσταση.
[Απ. 0,04=4%]

Πρόβλημα 19. (α) Σωματίδιο βρίσκεται σε διδιάστατο απειρόβαθο παραλληλόγραμμο δυναμικής ενέργειας διαστάσεων a, b (a > b):

$$U(x,y)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 0\le y\le b\\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$



Να βρεθεί η μορφή των κυματοσυναρτήσεων που περιγράφουν την κατάστασή του καθώς και το ενεργειακό του φάσμα.
(β) Θεωρείστε στη συνέχεια ότι a=b= L. Τι παρατηρείτε;
[Απ.(α)

$$E_{n_x n_y}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right),\quad \psi_{n_x n_y}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{n_x\pi}{\mathrm{a}}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right),\ n_x\ \kappa\alpha\iota\ n_y=1,2,3...$$

(β) Εκφυλισμός]