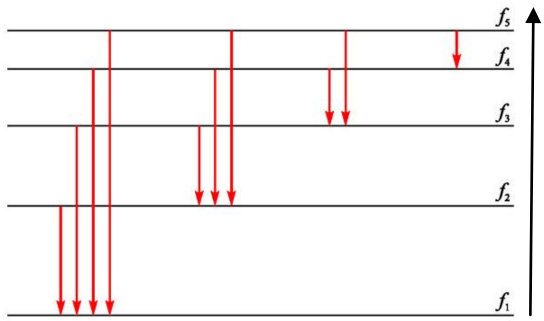
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 2 : Ατομικά φάσματα και πρότυπα
Αντιστοιχεί στα

(α) Κεφάλαιο 3 των Serway /Moses/Moyer
(β) Κεφάλαιο 6 του Krane

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

I. Το φάσμα του Υδρογόνου

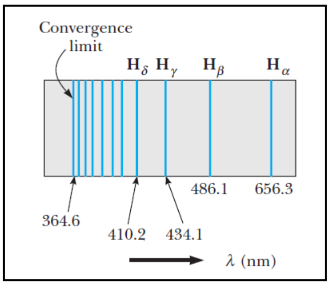
Πρόβλημα 1 (Βιβλίο Α. Ζδέτση- Πρόβλημα 7.1). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις, οι οποίες αφορούν τη συχνότητα f και το μήκος κύματος λ της πρώτης φασματικής γραμμής (από αριστερά προς τα δεξιά) στο διάγραμμα του σχήματος, είναι, κατά τη γνώμη σας, σωστές :
α) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$
β) η συχνότητα f δίνεται από τη σχέση $1/f = 1/f_1 - 1/f_2$
γ) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $1/\lambda = 1/\lambda_1 - 1/\lambda_2$
δ) η συχνότητα f δίνεται από τη σχέση $f=f_2-f_1$
ε) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $c/\lambda = c/\lambda_1 + c/\lambda_2$
στ) η συχνότητα f δίνεται από τη σχέση $cR_H/f = cR_H/f_1 + cR_H/f_2$



Πρόβλημα 2. Βρείτε το μέγιστο μήκος κύματος της φασματικής σειράς Balmer του ατόμου του υδρογόνου. Σε ποια περιοχή του φάσματος βρίσκεται αυτή η φασματική σειρά ;
Πρόβλημα 3. Βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο μήκος κύματος της φασματικής σειράς του Paschen του ατόμου του υδρογόνου. Σε ποια περιοχή του φάσματος βρίσκεται αυτή η φασματική σειρά ;
Πρόβλημα 4. Βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο μήκος κύματος της φασματικής σειράς του Lyman του ατόμου του υδρογόνου. Σε ποια περιοχή του φάσματος βρίσκεται αυτή η φασματική σειρά ;
Πρόβλημα 5. Ο Balmer διατύπωσε αρχικά την αρχή της αντιστοιχίας, για τις τέσσερις φασματικές γραμμές του φάσματος εκπομπής του υδρογόνου (H_α, H_β, H_γ, H_δ) που ήταν γνωστές τότε, ως:

$$\lambda(cm) = C_2 \frac{n^2}{n^2 - 2^2}, \quad n = 3,4,5 \ldots (1)$$

όπου $C_2 = 3645{,}6\text{x } 10^{-8}$cm μια σταθερά που την ονόμασε όριο σύγκλισης γιατί έδινε το μήκος κύματος για n=∞.
Ενθαρρυμένος από την επιτυχία του, προέβλεψε ότι θα υπάρχουν και άλλες φασματικές σειρές που δεν είχαν



ανακαλυφθεί και θα περιγράφονταν από σχέσεις της μορφής:

$$\lambda(cm) = C_3 \frac{n^2}{n^2 - 3^2},\ n = 4,5,6...$$

$$\lambda(cm) = C_4 \frac{n^2}{n^2 - 4^2},\ n = 5,6,7...$$

κλπ.

Να αποδείξετε ότι ή αρχική έκφραση (1) του Balmer συμπίπτει με αυτή των Rydberg-Ritz

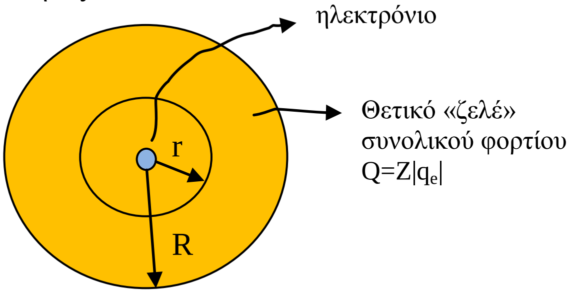
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ (σειρά Balmer)}$$

για $\frac{2^2}{C_2} = R_H$. Επαληθεύστε το υπολογίζοντας την τιμή $2^2/C_2$ και συγκρίνοντάς την με αυτή της R_H.

II. Το πρότυπο του Thomson

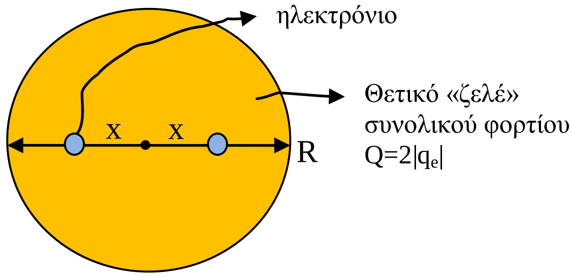
•**Πρόβλημα 6.** Θεωρήστε ένα μονοηλεκτρονιακό ιόν ατομικού αριθμού Z κατά το πρότυπο του Thomson. Αυτό θα αποτελείται από έναν σφαιρικό θετικό «ζελέ» ακτίνας R με ομοιόμορφη κατανομή συνολικού φορτίου $Q=Z|q_e|$, στο κέντρο του οποίου (για λόγους ευστάθειας) θα βρίσκεται το μοναδικό του ηλεκτρόνιο, όπως εικονίζεται στο Σχήμα.
(α) Απομακρύνουμε το ηλεκτρόνιο από τη θέση ισορροπίας του κατά r. Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση συχνότητας:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ZK_e q_e^2}{m_e R^3}}$$



[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το νόμο του Gauss για να υπολογίσετε αρχικά το ηλεκτρικό πεδίο του «ζελέ» σε απόσταση r, και από αυτό τη δύναμη που υφίσταται το ηλεκτρόνιο].
(β) Θεωρείστε τώρα συγκεκριμένα το άτομο του Υδρογόνου (Z=1). Η πραγματική έκτασή του στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειάς του είναι R=0,53Å. Έστω ότι το ηλεκτρόνιο απομακρύνεται κατά r από το κέντρο του «ζελέ» παίρνοντας ενέργεια από κάποιο εξωτερικό αίτιο. Αφού θα αρχίσει να ταλαντώνεται, θα εκπέμπει ακτινοβολία στη συχνότητα ταλάντωσης. Κατανοείτε τώρα ένα άλλο βασικό πρόβλημα του μοντέλλου με βάση τη γνώση που έχετε για το φάσμα εκπομπής του Υδρογόνου; Ποια θα είναι αυτή η συχνότητα και το αντίστοιχο μήκος κύματος; Συγκρίνετέ το με αυτό της ισχυρότερης γραμμής του φάσματος εκπομπής του Υδρογόνου που εμφανίζεται στα 122nm (σειρά Lyman).
[Απ. (β) $6{,}57\times10^{15}$ Hz και 45,7 nm]

•**Πρόβλημα 7.** Θεωρήστε το μοντέλο Thomson για ένα άτομο με 2 ηλεκτρόνια. Αφήστε τα ηλεκτρόνια να τοποθετηθούν κατά μήκος μιας διαμέτρου εκατέρωθεν του κέντρου της σφαίρας και καθένα σε απόσταση x από το κέντρο της. (α) Δείξτε ότι η διαμόρφωση είναι σταθερή αν x = R/2.
(β) Προσπαθήστε να κατασκευάσετε παρόμοιες σταθερές διαμορφώσεις για άτομα με 3, 4, 5 και 6 ηλεκτρόνια (προαιρετικό ερώτημα).
[Υπόδειξη: Στηριχθείτε στη διαπραγμάτευση του προηγούμενου προβλήματος]



III. Το πρότυπο του Bohr

Πρόβλημα 8. (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των ενεργειακών σταθμών (τις τέσσερις πρώτες) για τα ιόντα He^+, Li^{++}, Be^{+++} με βάση την πρόβλεψη του προτύπου του Bohr. Η κατασκευή να γίνει υπό σωστή κλίμακα, χρησιμοποιώντας ακόμη και χαρτί μιλιμετρέ. (β) Ποια έναι τα έργα ιονισμού αυτών των ατόμων; Τι παρατηρείτε; Είναι λογικό; (γ) Εμφανείστε στα διαγράμματα όλες τις δυνατές μεταβάσεις του ηλεκτρονίου σε κάθε περίπτωση σημειώνοντας τα αντίστοιχα μήκη κύμαος για το He^+ .
[Απ. Για το He^+ : E_1= -54,4eV, Για το Li^{++} : E_1= -122,4 eV, Για το Be^{+++}: E_1= -217,6 eV]
Πρόβλημα 9. Χρησιμοποιήστε την θεωρία του Bohr για να βρείτε τις ενεργειακές διαφορές $E\,(n_i \rightarrow n_f) = En_i - En_f$ και να δείξετε ότι:
(α) $E\,(4 \rightarrow 2) = E\,(4 \rightarrow 3) + E\,(3 \rightarrow 2)$.
(β) $E\,(4 \rightarrow 1) = E\,(4 \rightarrow 2) + E\,(2 \rightarrow 1)$.
Πρόβλημα 10. Ποια είναι η ακτίνα της πρώτης επιτρεπόμενης τροχιάς του ηλεκτρονίου στα ιόντα He^+, Li^{++}, Be^{+++} με βάση την πρόβλεψη του προτύπου του Bohr; Συγκρίνετε με το γνωστό αποτέλεσμα για το άτομο του Υδρογόνου. Σχολιάστε το τι παρατηρείτε γενικά.
[Απ. 0.026 5 nm , 0.017 7 nm , 0.013 2 nm]
Πρόβλημα 11. Υπολογείστε τον χρόνο μιας πλήρους περιστροφής του ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr. Αυτός ο χρόνος είναι γνωστός ως «ατομικό έτος». Συγκρίνατέ τον με τον μέσο χρόνο που το ηλεκτρόνιο «κάθεται» σε μια διεγερμένη κατάσταση (10^{-8} s).
[Απ. ~ $1{,}5\text{x}10^{-16}$ s]
Πρόβλημα 12. **A.** Ποια είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στη θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr; Ποια στην πρώτη και ποια στη δεύτερη διεγερμένη; Τι παρατηρείτε; Απαιτούνται στη συγκεκριμένη περίπτωση σχετικιστικοί υπολογισμοί και διορθώσεις;
[Απ. $\upsilon_1 = 2{,}19\times10^6$ m/s , $\upsilon_2 = 1{,}09\times10^6$ m/s , $\upsilon_3 = 7{,}28\times10^5$ m/s]
B. Επαναλάβατε τον παραπάνω υπολογισμό για το ιόν Li^{++} . Δοκιμάστε στη συνέχεια με ένα ιόν που έχει Z>80 (από το οποίο έχουμε αφαιρέσει όλα τα ηλεκτρόνια εκτός από ένα). Τι παρατηρείτε;
•**Πρόβλημα 13.** Ως γνωστόν η ενέργεια των επιτρεπόμενων τροχιών σε ένα μονοηλεκτρονιακό άτομο δίδεται σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr από την έκφραση:

$$E_n = -\frac{Z^2 m_e q_e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2 n^2} \quad (1)$$

Παράλληλα η θεωρία της σχετικότητας υποδεικνύει μεταβολή της μάζας του ηλεκτρονίου με την ταχύτητα με βάση τη σχέση:

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \quad (2),\ \ m_e = \text{μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου}$$

Εκτιμήστε την επίπτωση της ισχύος της σχέσης (2) στα τρία πρώτα ενεργειακά επίπεδα του ατόμου του υδρογόνου (Z=1). Συγκεκριμένα:
(α) Αποδείξτε ότι η σχετική μεταβολή της μάζας του περιστρεφόμενου ηλεκτρονίου δίδεται από την έκφραση:

$$\frac{\Delta m}{m_e} = \frac{m-m_e}{m_e} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} \quad , a = \frac{K_e q_e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

[Υπόδειξη: Αναπτύξτε σε σειρά την υπόρριζο ποσότητα της (2) και κρατείστε τους δύο πρώτους όρους].
(β) Υπολογίστε στη συνέχεια την σχετική μεταβολή στην ενέργεια.

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{E_n(m) - E_n(m_e)}{E_n(m_e)}$$

[Απ.. Για n=1 $\Delta E/E \sim 10^{-5}$]

•**Πρόβλημα 14.** Ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία στην κατάσταση n=3 από όπου μεταβαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση με την εκπομπή ενός φωτονίου. (α) Υπολογίστε το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου φωτονίου με βάση τη θεωρία του Bohr. (β) Συγκρίνατε το αποτέλεσμα με αυτό που προβλέπει η συνδυαστική αρχή των Rydberg-Ritz για τη συγκεκριμμένη περίπτωση μέχρι τρίτο δεκαδικό ψηφίο. Θα βρείτε μια μικρή διαφορά. Αυτό συμβαίνει γιατί η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει ανάκρουση του ατόμου κατά την εκπομπή του φωτονίου. Μέρος, επομένως, της ενέργειας του εκπεμπόμενου φωτονίου «δαπανάται» ως ενέργεια ανάκρουσης του ατόμου. (γ) Να εκτιμηθεί η ορμή και η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ατόμου του υδρογόνου στη συγκεκριμένη περίπτωση.
[Απ. (α) 102,669nm (β) 102,574nm με βάση τη συνδυαστική αρχή (γ) $P_{\text{atom}} = 6.44\times10^{-27}$ kg m/s $K_{\text{atom}} = 1.24\times10^{-26}$ J $= 7.75\times10^{-8}$ eV]

•**Πρόβλημα 15 (Ένα διαφορετικό «μονοηλεκτρονιακό άτομο»).** Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα ελκτικό κέντρο υπό την επίδραση ελκτικής δύναμης μέτρου:

$$F = \mathbb{C} r^{-\frac{3}{2}}, \quad \mathbb{C} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$$

Εφαρμόστε κατά γράμμα τη θεωρία του Bohr για να βρείτε τις επιτρεπόμενες ενέργειες των στασίμων τροχιών του σωματιδίου.
[Υπόδειξη: Θα πρέπει να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου από τη σχέση $U(r) = -\int F(r)dr$]

[Απ. $E_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{m_e \mathbb{C}^4}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}}, \ n = 1, 2, 3...$]