

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

(Υποχρεωτικό 4^{ου} Εξαμήνου)

Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος

Προβλήματα Σειρά # 3 : Κανόνες Κβάντωσης Wilson-Sommerfeld

Αρχή της αντιστοιχίας

Αντιστοιχεί στην παράδοση που έγινε στον πίνακα

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.

Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.

Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

Πρόβλημα 1. (α) Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck μεταπίπτει στην αντίστοιχη των Rayleigh-Jeans για $h \rightarrow 0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών ενός αρμονικού ταλαντωτή (διαπραγματεύση κατά Planck ή Wilson-Sommerfeld) τείνει στο μηδέν για $h \rightarrow 0$.

Σχολιάστε και τις δύο περιπτώσεις.

Πρόβλημα 2. Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου μάζας m μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας εύρους L όπου

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases}$$

αποδείξαμε στον πίνακα ότι το ενεργειακό του φάσμα με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld δίδεται από την έκφραση:

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Να υπολογιστεί η διαφορά των δύο πρώτων ενεργειακών σταθμών του

(α) Για $m = 9 \times 10^{-28}$ gr και $L = 10^{-8}$ cm (μικροσκοπικό σύστημα).

(β) Για $m = 10$ gr και $L = 1$ cm (μακροσκοπικό σύστημα).

Τι παρατηρείτε;

[Απ. (β) $\Delta E \sim 0$]

● **Πρόβλημα 3.** (α) Να αποδειχθεί ότι η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου κατά την μετάβαση του ηλεκτρονίου ενός μονοηλεκτρονιακού ατόμου ατομικού αριθμού Z από τη στάθμη n στην $n-1$ δίδεται από την έκφραση:

$$f = \frac{Z^2 2\pi^2 K_e^2 m_e q_e^4}{h^3} \left[\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right]$$

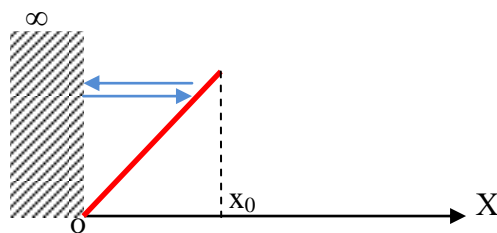
(β) Σε ποιά έκφραση μεταπίπτει η παραπάνω για $n \rightarrow \infty$;

(γ) Συγκρίνετε την έκφραση που βρήκατε στο σκέλος (β) με τη συχνότητα της ακτινοβολίας που θα εξέπεμπε το ηλεκτρόνιο εάν κινούνταν τελείως κλασικά στην τροχιά n ακτίνας r_n με ταχύτητα v_n . Σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα ισούται με τη συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου. Τι παρατηρείτε; Τι σημαίνει εδώ πρακτικά ότι $n \rightarrow \infty$;

[Απ. (β) $f = \frac{Z^2 4\pi^2 K_e^2 m_e q_e^4}{h^3 n^3}$ (γ) είναι ίσες]

Πρόβλημα 4. Σωματίο μάζας m κινείται στο διάστημα $(0, x_0)$ σε περιοχή του χώρου όπου η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{m}}, & x > 0 \end{cases}$$

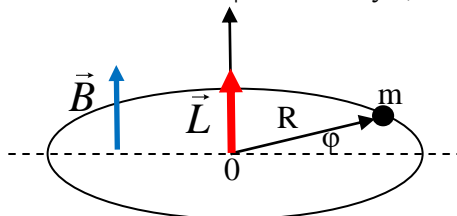


Να κατασκευαστεί το φασικό του διάγραμμα και να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld. Τι συμβαίνει στα όρια $\hbar \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$;

Δίδεται ότι : $\int \sqrt{\alpha x + b} dx = \frac{2(\alpha x + b)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha}$

[Απ. $E_n = \left(\frac{3\hbar}{4\sqrt{2}m}\right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$]

Πρόβλημα 5. Α(Ο μικροσκοπικός περιστροφάς). (α) Ένα σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να περιστρέφεται σε κυκλικό στεφάνι ακτίνας R , όπως στο σχήμα:



Να κατασκευαστεί το φασικό του διάγραμμα και να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld. Υπενθυμίζεται ότι η (κινητική) ενέργεια ενός περιστρεφόμενου υλικού σημείου ως προς άξονα δίνεται από τη σχέση $E = \frac{L^2}{2I}$ όπου L η στροφορμή του και I η ροπή αδρανείας του.

[Απ. $E_n = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m R^2} n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$]

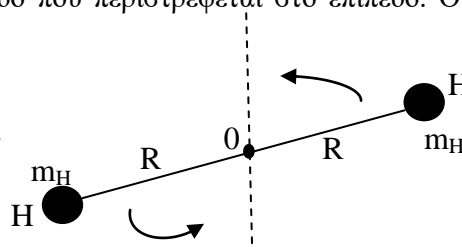
(β) Έστω ότι το σωματίδιο είναι φορτισμένο με φορτίο q και κατά μήκος του κάθετου στο επίπεδο του κύκλου άξονα εφαρμόζεται ένα ομογενές και σταθερό μαγνητικό πεδίο \vec{B} . Να υπολογιστεί εκ νέου το ενεργειακό του φάσμα. Υπενθυμίζεται ότι η δυναμική ενέργεια φορτισμένου περιστρεφόμενου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο δίδεται από την έκφραση

$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ όπου μ η μαγνητική διπολική ροπή του $\vec{\mu} = \frac{q\vec{L}}{2m}$.

[Απ. $E_n = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m R^2} n^2 - \frac{qB\hbar}{2\pi} n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$]

Β (Ο μικροσκοπικός στερεός περιστροφάς). Με τον όρο αυτό εννοούμε ένα σύστημα δύο υλικών σημείων ενωμένων με μία νοητή αβαρή ράβδο που περιστρέφεται στο επίπεδο. Ο στερεός περιστροφάς εξ' ορισμού έχει μόνο κινητική ενέργεια γιατί η συνολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν. Θεωρήστε, κατά συνέπεια το μόριο του H_2 ως έναν στερεό περιστροφά (σύστημα δύο ατόμων H) όπως στο σχήμα.

Να υπολογιστεί η ενέργεια του μορίου του H_2 (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld. Ως m_H δηλώνεται η μάζα του ατόμου του υδρογόνου.



$$[\text{Απ. } E_n = \frac{h^2}{16\pi^2 m_H R^2} n^2, n = 0, 1, 2, 3, \dots]$$

Πρόβλημα 6. Σωματίο μάζας m πέφτει ελεύθερα από ύψος H και αναπηδά διαρκώς ελαστικά στο έδαφος ευρισκόμενο στο πεδίο βαρύτητας της Γής.

Να κατασκευαστεί το φασικό του διάγραμμα και να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld.

Τι συμβαίνει στα όρια $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$;

$$\text{Δίδεται ότι : } \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a}$$

$$[\text{Απ. } E_n = \left(\frac{9mg^2 h^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}, n = 0, 1, 2, 3, \dots]$$

