ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 4 : Η γέννεση της σύγχρονης Κβαντομηχανικής
Αντιστοιχεί στα

(α) Κεφάλαιο 4 των Serway /Moses/Moyer

(β) Κεφάλαιο 4 του Krane

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.

I. Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός της ύλης (υπόθεση de Broglie και πειραματική της επαλήθευση)

Πρόβλημα 1. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie:
(α) Ενός σώματος μάζας 2gr που κινείται με ταχύτητα 500m/s.
(β) Ενός ελεύθερου πρωτονίου κινητικής ενέργειας 1MeV. Σκεφτείτε πρώτα εάν είναι σχετικιστικό.
[Απ. λ= (α) $6{,}62\times10^{-32}$ cm=$6{,}62\times10^{-24}$ Å (β) $2{,}89\times10^{-4}$ Å]

Πρόβλημα 2. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου που βρίσκεται στην πρώτη και τη δεύτερη τροχιά Bohr του ατόμου του υδρογόνου.
[Απ. λ_1= 3,32 Å, λ_2= 6,64 Å]

Πρόβλημα 3. (α) Ποια θα είναι η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου με μήκος κύματος de Broglie 0,10 nm;
(β) Ποια θα είναι η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου με μήκος κύματος de Broglie 10^{-14} m;
[Απ. (α) 150eV (β) 124 MeV]

●**Πρόβλημα 4. Α.** Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_0 και φορτίου q επιταχύνεται από την ηρεμία μέσω διαφοράς δυναμικού ΔV μεταξύ δύο σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου. Εάν η κίνησή του είναι μη σχετικιστική να αποδειχθεί ότι το μήκος κύματος de Broglie του σωματιδίου δίνεται από την έκφραση:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 q\Delta V}}$$

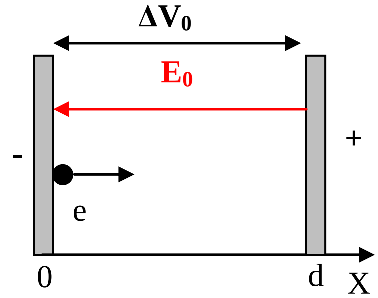
Β. Εάν η διαφορά δυναμικού είναι τόσο μεγάλη ώστε να οδηγήσει σε σχετικιστική κίνηση του σωματιδίου, να αποδειχθεί ότι τότε:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{q^2\Delta V^2 + 2m_0c^2 q\Delta V}}$$

η οποία για ηλεκτρόνιο μεταπίπτει στην:

$\lambda_e(\text{Å}) = \dfrac{12{,}4}{\sqrt{\Delta V}}\sqrt{1+\dfrac{q_e\Delta V}{2m_{e0}c^2}}$ με $q_e\Delta V, m_{e0}c^2$ σε eV και ΔV την αριθμητική τιμή της τάσης.

Γ. Ένα αρχικά ακίνητο ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο π.χ ενός πυκνωτή εντάσεως E_0=100V/cm και απόστασης μεταξύ των οπλισμών του d=6cm. (α) Μέσω ποιάς διαφοράς δυναμικού ΔV μέσα στο πεδίο πρέπει να επιταχυνθεί το αρχικά



ακίνητο ηλεκτρόνιο ώστε το μήκος κύματος de Broglie του να είναι $1{,}2\text{x}10^{-10}$m; Θεωρείστε ότι αυτό ξεκινά από τυχαία θέση μέσα στο πεδίο.
(β) Θεωρείστε ότι το ηλεκτρόνιο ξεκινά από την ηρεμία στη θέση x=0. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie του στη θέση x=6cm.
[Απ. (α) ΔV=100V (β) $0{,}5\text{x}10^{-10}$m=0,5 Å]

•**Πρόβλημα 5.** **Α.** Να αποδειχθεί ότι η φασική ταχύτητα του υλικού κύματος κατά de Broglie που συνοδεύει ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωμάτιο μάζας ηρεμίας m_0 δίδεται από την έκφραση:

$$\upsilon_p = c\sqrt{1+\left(\frac{m_0 c}{\hbar k}\right)^2}$$

Β. Θεωρείστε ένα σχετικιστικό κυματόδεμα που αναπαριστά ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωμάτιο μάζας ηρεμίας m_0 . Το κυματόδεμα έχει κεντρικό κυματαριθμό k_0. Να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα ομάδας του κυματοδέματος δίδεται από την έκφραση:

$$\upsilon_p = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_0 c}{\hbar k_0}\right)^2}}$$

[Υπόδειξη : Ακολουθείστε το σκεπτικό για το μη σχετικιστικό σωμάτιο που έγινε στο μάθημα λαμβάνοντας υπόψιν την ενέργεια σχετικιστικού σωματιδίου]

ΙΙ. Αρχή της αβεβαιότητας

Πρόβλημα 6. Θεωρείστε ότι ένα σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και ότι η ορμή του μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια 0,004%. Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του:
(α) Εάν το σωματίδιο έχει μάζα $5\text{x}10^{-3}$ kgr και κινείται με ταχύτητα 2 m/s.
(β) Εάν το σωματίδιο είναι ηλεκτρόνιο και κινείται με ταχύτητα $1{,}8\ \text{x}10^{8}$ m/s.
[Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι Δp/p=0,004. Στο (β) έχουμε σχετικιστικό σωμάτιο; Ποια είναι η μάζα κίνησής του;]
[Απ. (α) $\Delta x \geq 5{,}28\text{x}10^{-20}$ Å (β) $\Delta x \geq 2{,}57$Å]

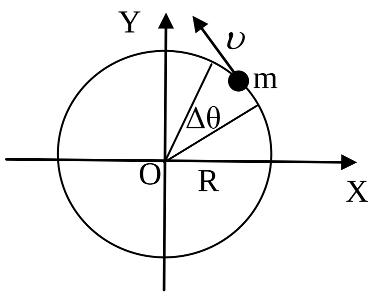
Πρόβλημα 7. Το μήκος κύματος λ ενός φωτονίου είναι γνωστό με ακρίβεια Δλ.
(α) Να αποδείξετε ότι η αβεβαιότητα στην ορμή του δίδεται από την έκφραση:

$$\Delta p = \left|-\frac{h}{\lambda^2}\right| \Delta\lambda = p\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

(β) Εάν για ένα φωτόνιο το θεωρούμενο μήκος κύματός του λ=3000Å προσδιορίζεται με ακρίβεια 10^{-6} %, να υπολογιστεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του.
[Υπόδειξη : Σκεφτείτε ότι $\Delta\lambda/\lambda=10^{-6}$.]
[Απ. $\Delta x \geq 239\text{x}10^{6}$ Å=23,9mm]

Πρόβλημα 8. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται μη σχετικιστικά σε κύκλο ακτίνας R με ταχύτητα μέτρου υ. Ξεκινώντας από τη σχέση αβεβαιότητας ορμής-θέσης να αποδείξετε τη σχέση αβεβαιότητας στροφορμής-γωνίας:

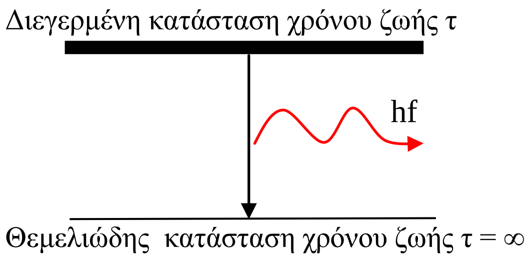
$$(\Delta L)(\Delta\theta) \geq \frac{\hbar}{2}$$



Πρόβλημα 9. Είναι γνωστό ότι κατά τη μετάβαση ενός ηλεκτρονίου από μία διεγερμένη κατάσταση στη θεμελιώδη ενός ατόμου εκπέμπεται ένα φωτόνιο μήκους κύματος λ. Εάν σε ένα άτομο ο χρόνος ζωής μίας διεγερμένης κατάστασης είναι $\Delta t = \tau$, να αποδειχθεί ότι το εύρος της αντίστοιχης γραμμής του φάσματος εκπομπής $\Delta\lambda$ δίδεται από τη σχέση:

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c\tau}$$

Να γίνει αριθμητική εφαρμογή για
λ=6000Å και $\tau=10^{-9}$ s.
[Απ. $\Delta\lambda \geq 955\text{x}10^{-6}$Å]



•**Πρόβλημα 10.** Η ενέργεια ενός μονοδιάστατου μικροσκοπικού ταλαντωτή δίδεται από την γενική έκφραση:

$$E = \frac{p_x^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}Cx^2$$

(α) Κάνοντας χρήση της αρχής της αβεβαιότητας να αποδείξετε ότι:

$$E > \frac{h^2}{32\pi^2 m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}C(\Delta x)^2$$

(β) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα θέσης που αντιστοιχεί σε ελάχιστη ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι η ελάχιστη ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή δίδεται από την έκφραση:

$$E_{\min} = \frac{1}{2}hf\,,\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{m}}$$

[Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι $p_x \geq \Delta p_x$ και $x \geq \Delta x$ καθώς και ότι το ελάχιστο γινόμενο αβεβαιότητας είναι $(\Delta p_x)(\Delta x)= h/4\pi$]