ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ και ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ»

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IV
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1) Να δειχθεί ότι οι επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές:
α) $T: R^2 \to R^2$, $T(x,y)=(x+y,x)$ β) $T: R^3 \to R$, $T(x,y,z)=2x-3y+4z$

2) Να δειχθεί ότι οι επόμενες απεικονίσεις δεν είναι γραμμικές:
α) $T: R^2 \to R$, $T(x,y)=xy$ β) $T: R^2 \to R^3$, $T(x,y)=(x+1,2y,x+y)$
γ) $T: R^3 \to R^2$, $T(x,y,z)=(|x|,0)$

3) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων $n\times n$ επί του σώματος F. Εάν M τυχαίος πίνακας του V, τότε η απεικόνιση $T: V\to V$ που ορίζεται από την σχέση $T(A)=AM+MA$ με $A\in V$ είναι γραμμική.

4) Έστω $T: R^2 \to R$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία γνωρίζουμε ότι $T(1,1)=3$ και $T(0,1)=-2$. Να βρεθεί η γενική έκφραση $T(x,y)$.

5) Έστω $T: R^3\to R^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από την σχέση

$$T(x,y,z)=(x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση α) της εικόνας $U=Im(T)$ και β) του πυρήνος $W=Ker(T)$

6) Έστω S και T γραμμικοί τελεστές που ορίζονται ως εξής:

$S: R^2\to R^2$, $S(x,y)=(y,x)$, $T: R^2\to R^2$, $S(x,y)=T(0,x)$

Να βρεθούν οι εκφράσεις για τους τελεστές $S+T$, $2S-3T$, TS, S^2, T^2.

7) Έστω T ο τελεστής επί του R^3 ο οριζόμενος από την σχέση:
$T(x,y,z)=(2x,\ 4x-y,\ 2x+3y-z)$
α) Να δειχθεί ότι ο T είναι αντιστρέψιμος, β) να βρεθεί ο τύπος του T^{-1} .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ V
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

1) Να βρεθεί η παράσταση υπό μορφή πίνακα των παρακάτω τελεστών επί του R^2 ως προς την συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1=(1,0), \mathbf{e}_2=(0,1)\}$
α) T(x,y)=(2x, 3x-y) β) T(x,y)=(3x-4y, x+5y)

2) Να βρεθεί η παράσταση υπό μορφή πίνακα των τελεστών της προηγουμένης άσκησης ως προς την βάση $\{\mathbf{f}_1=(1,3), \mathbf{f}_2=(2,5)\}$

3) Η γενική έκφραση ενός τελεστή T επί του διανυσματικού χώρου R^3 έχει την μορφή:

$$T(x,y,z)=(\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z,\ \beta_1x+\beta_2y+\beta_3z,\ \gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z)$$

Να δειχθεί ότι η παράσταση του τελεστή T υπό μορφή πίνακα ως προς την συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1=(1,0,0), \mathbf{e}_2=(0,1,0), \mathbf{e}_3=(0,0,1)\}$ είναι:

$$[T]_e=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

4) Να βρεθούν οι αναπαραστάσεις υπό μορφή πίνακα των παρακάτω τελεστών επί του διανυσματικού χώρου R^3 ως προς την συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_i\}$, i=1,2,3
α) T(x,y,z)=(2x-3y+4z, 5x-y+2z, 4x+7y) β) T(x,y,z)=(2y+z, x-4y, 3x)

5) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων τύπου 2×2 επί του σώματος R και M ο πίνακας: $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τον τελεστή T: V→V που ορίζεται από την σχέση $T: A\in V\rightarrow T(A)\equiv MA$. Να βρεθεί η παράσταση του τελεστή T υπό μορφή πίνακα ως προς την συνήθη βάση του V που είναι:

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί το ίχνος του T και η παράσταση του τυχαίου διανύσματος A.

6) Δίνεται ο τελεστής $T: R^3\rightarrow R^2$, T(x,y,z)=(3x+2y-4z, x-5y+3z)
α) Να βρεθεί η παράσταση του T που αντιστοιχεί ως προς τις βάσεις:
$\{\mathbf{f}_1=(1,1,1), \mathbf{f}_2=(1,1,0), \mathbf{f}_3=(1,0,0)\}$ του R^3 και $\{\mathbf{g}_1=(1,3), \mathbf{g}_2=(2,5)\}$ του R^2
β) Να επαληθευθεί η σχέση $[T]_f^g\,[v]_f=[T(v)]_g$.

7) Να δειχθεί ότι η σχέση AB-BA=I είναι αδύνατη για τους τελεστές A και B που ορίζονται σ' ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης.

8) Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι θετικά ορισμένοι:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

7) Να βρείτε τις τιμές το k για τις οποίες οι παρακάτω πίνακες είναι θετικά ορισμένοι.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & k \\ k & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} k & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ VI
ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΝΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗ

1) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

και να ελεχθεί εάν διαγωνοποιούνται ή όχι.

2) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθεί, με την μέθοδο της διαγωνοποίησης ο πίνακας A^n όπου $n \in \mathbf{N}$.

3) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθεί, με την μέθοδο της διαγωνοποίησης ο πίνακας A^n όπου $n \in \mathbf{N}$.

4) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν:

α) Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A

β) Ο πίνακας A^n όπου $n=2,3,\cdots$.

4) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του *x* για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

6) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

7) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Α. Είναι ο πίνακας Α διαγωνοποιήσιμος ;
β) Να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : R^3 \to R^3$, που αντιστοιχεί στον πίνακα Α ως προς την συνήθη βάση του R^3, καθώς και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μετασχηματισμού Τ.

8) Να αποδείξετε ότι εάν οι γραμμικοί τελεστές Α, Β μετατίθενται, (ΑΒ=ΒΑ), τότε κάθε ιδιόχωρος του τελεστή Α είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του τελεστή Β. (Ένας υπόχωρος U ενός διαν. χώρου V λέγεται αναλλοίωτος υπόχωρος ενός τελεστή Τ εάν $Tx \in U$, $\forall x \in U$).
(Υπόδειξη : εφαρμόστε την ισότητα ΑΒ=ΒΑ σ' ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή Α)

9) Έστω **v**, **u** ιδιοδιανύσματα του τελεστή Α που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές. Να δείξετε ότι το διάνυσμα α**v**+β**u**, (α≠0, β≠0), δεν μπορεί να είναι ιδιοδιάνυσμα του Α.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Ι

ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

1) Να δείξετε ότι τα σημεία Α(3, 8), Β(-11, 3), Γ(-8, -2) είναι οι κορυφές ενός ισοσκελούς τριγώνου.

2) Να δείξετε ότι τα σημεία Α(7, 5), Β(2, 3), Γ(6, -7) είναι οι κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

3) Δείξτε ότι τα επόμενα σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία: Α(3,2), Β(5, 8/3), Γ(9, 4).

4) Να βρεθεί το σημείο που ισαπέχει από τα σημεία Α(1, 7), Β(8, 6), Γ(7, -1)
(Απ. (4, 3))

5) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου P(x, y) που διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία P_1(1, 7), P_2(6, -3) σε λόγο r=2/3. (Απ. (3,3))

6) Να αποδειχθεί ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτο ως προς την περιστροφή ενός ορθογωνίου συστήματος αναφοράς OXY.

7) Σ' ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων OXY θεωρούμε την εξίσωση $x^2+y^2=R^2$. Να βρεθεί η νέα έκφραση της εξίσωσης αυτής εάν λάβουμε νέους άξονες OX′, OY′, οι οποίοι διχοτομούν τις γωνίες των παλαιών. (Απ. $x'^2+y'^2=R^2$)

8) Να αποδειχθεί η επιμεριστική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:
$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}$

9) Να αποδειχθεί ότι: $|\mathbf{v}+\mathbf{u}| \leq |\mathbf{v}|+|\mathbf{u}|$

10) Να αποδειχθεί η ανισότητα των Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}|\leq|\mathbf{v}||\mathbf{u}|$

11) Να αποδειχθεί:
α) ο νόμος του συνημιτόνου: $|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2=|\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}|^2-2|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos\theta$ όπου θ η γωνία των διανυσμάτων **v** και **u** .
β) η ταυτότητα $|\mathbf{v}+\mathbf{u}|^2 -|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2=4\,\mathbf{v}.\mathbf{u}$
γ) η ταυτότητα $|\mathbf{v}+\mathbf{u}|^2+||\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2=2|\mathbf{v}|^2+2|\mathbf{u}|^2$

12) Να αποδειχθούν οι σχέσεις:
α) $\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})-\mathbf{w}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$
β) $(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})-\mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$
γ) $(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$

13) Να αποδείξετε την ταυτότητα του Jacobi:

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) + \mathbf{u}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) + \mathbf{w}(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = 0$$

14) Δείξτε ότι εάν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ και ισχύουν οι σχέσεις :

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ και $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

τότε $\mathbf{u}=\mathbf{w}$. Εάν όμως ισχύει μια μόνο από τις παραπάνω σχέσεις, τότε $\mathbf{u}\neq\mathbf{w}$.

1) Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\mathbf{r}(t)\right]=\frac{d\lambda(t)}{dt}\mathbf{r}(t)+\lambda(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\right]=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\mathbf{v}(t)+\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t)\right]=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{r}(t)\times\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

2) Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ και το διάστημα μεταβολής I της ανεξάρτητης μεταβλητής t έτσι ώστε το ίχνος της $\mathbf{r}(t)$, (δηλαδή το σύνολο των σημείων, τα οποία αποτελούν το πέρας του διανύσματος $\mathbf{r}(t)$ όταν το t μεταβάλλεται στο διάστημα I), να είναι η καμπύλη:

α) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$ με τη θετική φορά διαγραφής

β) $4x^2+9y^2=36$ με την αρνητική φορά διαγραφής

γ) $y=x^2$ με φορά διαγραφής από τ' αριστερά προς τα δεξιά

δ) $y=x^3$ με φορά διαγραφής από τ' αριστερά προς τα δεξιά

3) Οι καμπύλες με διανυσματικές παραμετρικές εξισώσεις:

$\mathbf{r}_1(t)=(e^t-1)\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}+\ln(t+1)\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{r}_2(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}+(t^3+1)\mathbf{k}$

τέμνονται στην αρχή των αξόνων. Να υπολογισθεί η γωνία της τομής των.

4) Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,2\pi]$, που να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\mathbf{r}(0)=\alpha\mathbf{i}$ και η γραφική της παράσταση της r(t) να είναι η έλλειψη: $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

η οποία διαγράφεται:

α) μια φορά κατά τη θετική φορά

β) δυο φορές κατά τη θετική φορά

γ) μια φορά κατά την αρνητική φορά

δ) δυο φορές κατά την αρνητική φορά

1) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P(-2, 3) και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-3y+6=0$.
(Απ. $3x+2y=0$)

2) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί κάθετα το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $P_1(7, 4)$ και $P_2(-1, -2)$. (Απ. $4x+3y-15=0$)

3) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P(4, -2) και η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία αυτή είναι d=2. (Απ. $4x+3y=10$ και $y=-2$)

4) Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $12x-5y-15=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (η) που είναι παράλληλη προς την (ε) και έχουν απόσταση d=4. (Απ. $12x-5y+37=0$ και $12x-5y-67=0$)

5) Να βρεθεί η εξίσωση της δέσμης των ευθειών
α) των οποίων η κλίση είναι -4
β) διέρχονται από το σημείο P(4, 1)
γ) των οποίων η τεταγμένη επί την αρχή είναι 7
δ) των οποίων το άθροισμα των συντεταγμένων επί την αρχή είναι 8
ε) των οποίων η τεταγμένη επί την αρχήν είναι διπλάσια της τετμημένης επί την αρχήν.
(Απ. α. $4x+y-c=0$ β. $cx-y+1-4c=0$ γ. $cx-y+7=0$ δ. $(8-c)x+cy-8c+c^2=0$ ε. $2x+y-c=0$)

6) Εάν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι τρία μη συνευθειακά σημεία, να αποδείξετε, ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά, δίνεται από την έκφραση:

$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IV

ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

1) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα, που ορίζεται από τα σημεία $P_1(-3,2,1)$, $P_2(9,4,3)$ και διέρχεται από το μέσο του.

(Απ. $6x+y+z=23$)

2) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που διέρχεται από το σημείο $P_1(1,-2,3)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $x-3y+2z=0$.

(Απ. $x-3y+2z=13$)

3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που διέρχεται από το σημείο $P_1(1,0,-2)$ και είναι κάθετο σε καθένα από τα επίπεδα $2x+y-z=2$ και $x-y-z=3$.

(Απ. $2x-y+3z+4=0$)

4) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1,1,-1)$, $P_2(-2,-2,2)$, $P_3(1,-1,2)$

(Απ. $x-3y-2z=0$)

5) Να υπολογισθεί η απόσταση d του σημείου $P(-2,2,3)$ από το επίπεδο $8x-4y-z-8=0$.

(Απ. $d=35/9$)

6) Να βρεθεί η γωνία θ των επιπέδων $3x+2y-5z=4$ και $2x-3y+5z=8$. (Απ. $\cos\theta=25/38$)

7) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που διέρχεται από την τομή των επιπέδων $3x+y-5z+7=0$ και $x-2y+4z-3=0$ και περιέχει το σημείο $P(-3,2,-4)$.

(Απ. $49x-7y-25z+61=0$)

8) Να δείξετε ότι τα επίπεδα:

$7x+4y-4z=-30$ $\quad$ $36x-51y+12z=-17$

$14x+8y-8z=12$ $\quad$ $12x-17y+4z=3$

ορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

9) Ένα σημείο P κινείται στον χώρο έτσι ώστε για κάθε χρονική στιγμή t να ισχύει: $\mathbf{OP}=\mathbf{r}(t)=(1-t)\mathbf{i}+(2-3t)\mathbf{j}+(2t-1)\mathbf{k}$

α) Να προσδιοριστεί η μορφή της τροχιάς του.

β) Για ποια χρονική στιγμή t το σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο $2x+3y+2z+1=0$;

γ) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, το οποίο είναι παράλληλο προς το προηγούμενο και το οποίο συναντά το σημείο P την χρονική στιγμή $t=3$.

(Απ. (α) ευθεία, (β) $t=1$, (γ) $2x+3y+2z+20=0$)

10) Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου, που περιέχει το σημείο $P_0(1,2,-3)$ και να είναι παράλληλο προς το επίπεδο $3x-y+2z=4$. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των δυο επιπέδων ;

(Απ. $3x-y+2z+5=0$, $d=9/\sqrt{14}$)

11) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου, που είναι παράλληλο προς το επίπεδο με εξίσωση $2x-y+2z+4=0$, αν το σημείο $P_0(3,2,-1)$ απέχει αποστάσεις ίσες από τα δυο επίπεδα.

(Απ. $2x-y+2z-8=0$)

12) Δίνονται τα σημεία Α(1,2,3) και Β(3,3,1) και το διάνυσμα $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Έστω (ε) η ευθεία, που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$.
α) Να δειχθεί ότι το σημείο Β δεν ανήκει στην ευθεία (ε).
β) Να βρεθεί το σημείο Μ της ευθείας (ε), που η απόσταση του από το σημείο Β είναι ελάχιστη, καθώς και η απόσταση αυτή.

(Απ. Μ(5/9,26/9,19/9)

13) Δίνονται τα σημεία Α(½,½,0), Β(0,1,0), Γ(0,0,1), Δ(½,½,½).
α) Να οριστεί η εξίσωση του επιπέδου, που διέρχεται από την ευθεία, που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και είναι παράλληλο προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.
β) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των ευθειών που περιέχουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. (Απ. (α)
$2x+2y+4z-2=0$, (**β**) $d=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{8}}$)

14) Δίνεται η ευθεία (ε) ως τομή των επιπέδων:
(Π_1): $4x-3y+8z-5=0$, (Π_2): $-3x+2y-3z-1=0$
Να βρεθεί η απόσταση d=ΟΑ της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε) και η εξίσωση της ευθείας (η) που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ.
(Απ. $d=\sqrt{\frac{1059}{194}}$, $\frac{x-x_0}{x_A-x_0}=\frac{y-y_0}{y_A-y_0}=\frac{z-z_0}{z_A-z_0}$ με
$(x_A,y_A,z_A)=\left(\frac{319}{192},-\frac{833}{192},-\frac{1025}{192}\right)$ και $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$)

15) Να βρεθεί η προβολή της ευθείας (ε) με εξισώσεις: $x+y-z=1$, $2x+3y+2z=2$ στο επίπεδο Oxz.

(Απ. $x=1+5z$)

16) Δίνεται το επίπεδο (Π): $2x+3y+z+4=0$. Να βρεθεί ποια σχέση ισχύει μεταξύ των λ και μ, ώστε τα διανύσματα $\mathbf{v}_1=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{v}_2=\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}$ να βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στο αρχικό.
(Απ. λ=μ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ V

ΚΑΜΠΥΛΕΣ Β΄ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ - ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

1) Για την έλλειψη $9x^2+16y^2=576$ να βρεθούν ο μεγάλος ημιάξονας, ο μικρός ημιάξονας, η εκκεντρότητα, οι συντεταγμένες των εστιών και οι εξισώσεις των διευθετουσών. (Απ. $\alpha=8$, $\beta=6$, $e=2\sqrt{7}$, $F_1(2\sqrt{7},0)$, $F_2(-2\sqrt{7},0)$, $x=\pm(32\sqrt{7})/7$)

2) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, την μια εστία της στο σημείο (0,3) και το μήκος του μεγάλου ημιάξονα να είναι 5. (Απ. $x^2/16+y^2/25=1$)

3) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, ο μεγάλος ημιάξονας να βρίσκεται στον άξονα ΟΧ και να διέρχεται από τα σημεία (4,3), (6,2). (Απ. $x^2+4y^2=52$)

4) Ένα σημείο $P(x,y)$ κινείται έτσι ώστε η απόσταση του από το σημείο $P_1(4,0)$ ισούται με το ήμισυ της αποστάσεως του από την ευθεία (ε) με εξίσωση $x-16=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που θα διανύσει.
(Απ. Έλλειψη με εξίσωση $3x^2+4y^2=192$)

5) Η τροχιά της Γης είναι έλλειψη με τον Ήλιο να βρίσκεται σε μια από τις εστίες. Ο μεγάλος ημιάξονας είναι 93 εκατομμύρια μίλια και η εκκεντρότητα 1/62. Να βρεθούν η μικρότερη και η μεγαλύτερη απόσταση της Γης από τον Ήλιο.
(Απ. 91.500.000 - 94.500.000)

6) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των κύκλων: $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2-4x-21=0$. (Απ. $(x-1)^2/9+y^2/8=1$ και $(x-1)^2/4+y^2/3=1$)

7) Σ’ ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 12 εκ. θεωρούμε το σημείο Ρ με μήκος ΑΡ=8 εκ. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης, που διαγράφει το σημείο Ρ, όταν το ευθ. τμήμα ΑΒ κινείται έτσι ώστε το σημείο Α να κινείται επί του άξονος ΟΥ και το Β επί του άξονος ΟΧ. (Απ. $x^2+4y^2=64$)

8) Ένα σημείο κινείται στο επίπεδο ΟΧΥ έτσι ώστε το γινόμενο των αποστάσεων του από την ευθεία (ε_1) $4x-3y+11=0$ και (ε_2) $4x+3y+5=0$ να είναι 144/25. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διαγράφει. (Απ. $(x+2)^2/9-(y-1)^2/16=1$)

9) Ένα σημείο κινείται στο επίπεδο ΟΧΥ έτσι ώστε η απόσταση του από το σημείο $P_1(0,4)$ να ισούται με το 4/3 της απόστασης του από την ευθεία (ε) με εξίσωση $4y-9=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διαγράφει. (Απ. $y^2/9-x^2/7=1$)

10) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής, που έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, μια κορυφή στο σημείο (6,0) και η εξίσωση της μιας ασυμπτώτου είναι $4x-3y=0$. (Απ. $x^2/36-y^2/64=1$)

11) Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2+8y-6x+4=0$. Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες της κορυφής, οι συντεταγμένες της εστίας και η εξίσωση της διευθετούσας. (Απ. (-2,4), (-½,-4), x=-7/2)

12) Εάν 0<e<1 να δειχθεί ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες της διαφορικής εξίσωσης $y'=(e^2-1)x/y$ είναι ελλείψεις με εκκεντρότητα e.

13) Να προσδιοριστούν τα σημεία επαφής $M(x_1,y_1)$ των εφαπτομένων της έλλειψης $x^2+4y^2=8$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $x+2y=7$. (Απ. (2,1) και (-2,-1))

14) Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x^2-y^2=1$. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής, που ορίζεται

α) από το ευθ. τμήμα ΟΚ με Ο την αρχή των αξόνων και Κ το σημείο τομής της υπερβολής με τον άξονα ΟΧ,

β) από το ευθ. τμήμα ΟΜ με Μ σημείο της υπερβολής και

γ) από το τμήμα της υπερβολής ΚΜ.

(Απ. $E=\theta_0/2$, όπου θ_0 η γωνία των ευθ. τμημάτων ΟΚ και ΟΜ)

15) Η κάθετη ευθεία σε κάθε σημείο Μ μιας καμπύλης C τέμνει τους άξονες ΟΧ, ΟΥ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, έτσι ώστε ΜΑ=ΜΒ. Να ορισθεί η καμπύλη C όταν το σημείο (4,5) ανήκει στην καμπύλη. (Απ. $x^2-y^2=-9$)

16) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία $x+y+1=0$. (Απ. $x^2-2xy+y^2-2x-2y=1$)

17) Ένα υλικό σημείο κινείται πάνω στην έλλειψη $3x^2+y^2=1$ σύμφωνα με την διανυσματική εξίσωση $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$.

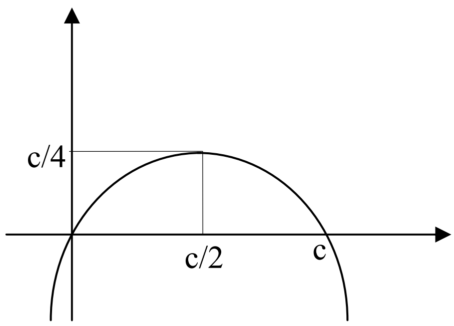
α) Να βρεθεί η φορά διαγραφής

β) Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας

γ) Να βρεθεί ο χρόνος μιας πλήρους διαγραφής της έλλειψης.

(Απ. θετική φορά διαγραφής, $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t=3x(t)$, $T=2\pi/\sqrt{3}$)

18) Ένα κινητό κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2+c(y-x)=0$ με c>0, έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή t οι συνιστώσες της επιτάχυνσης να είναι ίσες. Εάν σε T χρονικές μονάδες το κινητό μεταβαίνει από το σημείο (c,0) στο σημείο (0,0), πόσο χρονικό διάστημα T_1 θα χρειαστεί για να μεταβεί από το σημείο (c,0) στο ενδιάμεσο σημείο (c/2,c/4) του προηγούμενου τόξου. (Απ. $T_1=3T/4$)



1) Για τις παρακάτω εξισώσεις να προσδιοριστεί ο τύπος της κωνικής τομής και να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της στοιχεία: εστίες, κορυφές, κέντρο, ασύμπτωτες, διευθετούσες.

α)	$3x^2+2y^2-12x+8y+19=0$	**β)**	$x^2+2x+8y-15=0$
γ)	$9x^2-4y^2-54x+45=0$	**δ)**	$9y^2-25x^2-90y-50x-25=0$
ε)	$x^2-y^2-2x+2y=0$	**ζ)**	$x^2+y^2-2x-2y+4=0$

2) Να προσδιοριστεί η τιμή του c ώστε η εξίσωση $2xy-4x+7y+c=0$ έχει ως γραφική παράσταση δυο ευθείες γραμμές.

3) Δίνεται η εξίσωση $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1$. Να βρεθεί το είδος της κωνικής τομής και η γωνία φ κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το σύστημα συντεταγμένων ΟΧΥ ώστε η κωνική τομή να λάβει την κανονική της μορφή.

4) Δίνεται η εξίσωση $31x^2+10\sqrt{3}xy+21y^2=144$. Να βρεθεί το είδος της κωνικής τομής και η γωνία φ κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το σύστημα συντεταγμένων ΟΧΥ ώστε η κωνική τομή να λάβει την κανονική της μορφή.

5) Αν η εξίσωση $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}xy+\Gamma y^2=0$ παριστάνει δυο ευθείες με εξισώσεις $y=m_1x$ και $y=m_2x$ να δείξετε ότι:

α) $\Gamma\neq 0$

β) $m_1+m_2=-\mathrm{B}/\Gamma$ και $m_1m_2=\mathrm{A}/\Gamma$

γ) οι ευθείες ταυτίζονται αν $\mathrm{B}^2=4\mathrm{A}\Gamma$

δ) οι ευθείες είναι κάθετες αν $\mathrm{A}+\Gamma=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ VII

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1) Να βρεθούν όλες οι δυνατές πολικές συντεταγμένες του σημείου P, που έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (1,-1). (Απ. ($\sqrt{2}$,7π/4+2kπ))

2) Δίνονται τα σημεία A και B με πολικές συντεταγμένες (1,π/3) και (2,π). Να βρεθεί η απόσταση των σημείων A και B και οι εξισώσεις των εφαπτόμενων των κύκλων r=1 και r=2 στα σημεία A και B αντίστοιχα.

(Απ. d=$\sqrt{7}$, $r=\dfrac{1}{\cos(\theta-\pi/3)}$, $r=\dfrac{2}{\cos(\theta-\pi)}$)

3) Να βρεθεί η πολική εξίσωση του κύκλου με κέντρο K(4,π/3), (σε πολικές συντεταγμένες), και ακτίνα R=4. Στη συνέχεια να μετασχηματισθεί η εξίσωση αυτή σε καρτεσιανές συντεταγμένες. (Απ. r^2-8rcos(θ-π/3)=0, $(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=16$)

4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $r=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ για e=1 παριστάνει παραβολή.

5) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες:

α) $r=1-\dfrac{1}{1+\theta}$ **β)** $r^2\theta=\alpha^2$ **γ)** r=β-αcosθ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ VIII
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

1) Να βρεθεί η εξίσωση του ορθού κυκλικού κώνου ακτίνας βάσεως R και ύψους h.

(Απ. $(z\text{-h})^2=\dfrac{h^2}{R^2}\left[x^2+y^2\right]$
)

2) Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή την αρχή των αξόνων και οδηγό την καμπύλη: $x^2+y^2=y$, $z=$α, α$\in$R (Απ. αx^2+αy^2=yz)

3) Να βρεθεί η εξίσωση του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας βάσεως R και ύψους h. (Απ. $x^2+y^2=R^2$)

4) Να βρεθεί η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη: $z=0$, $y=x^2$ και γενέτειρα παράλληλη προς την ευθεία: $2x-y+z=0$, $2x+5y-z-4=0$
(Απ. $(3x+z)^2-9y+3z=0$)

5) Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της παραβολής $y=αz^2$, $x=0$ γύρω από τον άξονα OZ. (Απ. $x^2+y^2=α^2z^4$
)

6) Σημείο Μ κινείται στο χώρο έτσι ώστε η απόσταση του από το επίπεδο OXY να είναι το μισό της απόστασης του από την αρχή. Να βρεθεί η εξίσωση και το είδος του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ. (Απ. $x^2+y^2-3z^2=0$, κώνος)

7) Σημείο Μ κινείται στο χώρο έτσι ώστε η απόλυτη διαφορά των αποστάσεων του από τα σημεία $P_1(-2,0,0)$ και $P_2(2,0,0)$ είναι 1. Να βρεθεί το είδος και η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ.
(Απ. $12x^2-4y^2-4z^2=15$, δίχωνο υπερβολοειδές)

8) Η καμπύλη με διανυσματική εξίσωση $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\cos t\,\mathbf{i}+3\sqrt{t}\sin t\,\mathbf{j}+\sqrt{1-t}\,\mathbf{k}$ $0\le t\le 1$ ανήκει σε μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού. Προσδιορίστε την εξίσωση της επιφάνειας αυτής και καθορίστε το είδος της.

(Απ. $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$ ελλειψοειδές)

9) Δίνεται ότι το ελλειψοειδές $x^2/α^2+y^2/β^2+z^2/γ^2=1$ τέμνεται από το επίπεδο

$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ κατά μια καμπύλη (c). Εάν το επίπεδο αυτό δεν περνάει από την αρχή των αξόνων, να βρεθεί η εξίσωση του κώνου, που έχει κορυφή το κέντρο του ελλειψοειδούς και οδηγό την καμπύλη (c).

(Απ. $(x^2/\alpha^2+y^2/\beta^2+z^2/\gamma^2)\Delta^2=(Ax+By+\Gamma z)^2$)

10) **α)** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα σημεία Α(4,0,0) και Β(0,0,3)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται από τα σημεία Α(4,0,0), Β(0,0,3) και Γ(0,0,0) και έχει ακτίνα 5.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=3$ και της ευθείας $y=2x-1$, $z=3x-2$ και τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας στα σημεία αυτά.

(Απ. **α)** $8x-6z-7=0$ επίπεδο,

β) $$(x-2)^2+\left(y-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=25$$

ή

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=25$$

γ) Α(1,1,1), Β(1/7,-5/7,-11/7), $x+y+z-3=0$ και $x-5y+11z-21=0$)

11) Να βρεθεί η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της επίφάνειας που παράγεται από περιστροφή της καμπύλης με εξίσωση y=f(x) του επιπέδου ΟΧΥ όταν περιστραφεί α) γύρω από τον άξονα ΟΧ και β) γύρω από τον άξονα ΟΥ. (Εφαρμόστε κατάλληλα την διανυσματική παραμετρική εξίσωση της παραγράφου 8.4: $\mathbf{r}(t,u)= \mathbf{r}_{\pi\rho o\beta}(t)+\mathbf{r}_1\cos u+\mathbf{r}_2\sin u$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ IX
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1) Δίδονται οι επιφάνειες: $x^2+y^2+z^2=4$, $(x-1)^2+y^2=1$. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης κατά την οποίαν τέμνονται οι επιφάνειες αυτές.

(Απ. $x=1+\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=2\sin(\theta/2)$)

2) Βρείτε την τομή του επιπέδου ΟΧΥ και του κάθετου επιπέδου της καμπύλης $\mathbf{r}=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ στο σημείο $t=\pi/2$. (Απ. $x=-\pi/2$, $-\infty<y<\infty$, $z=0$)

3) Βρείτε την τομή του επιπέδου ΟΧΥ και της εφαπτόμενης της καμπύλης $\mathbf{r}=(1+t)\mathbf{i}-t^2\mathbf{j}+(1+t^3)\mathbf{k}$ στο σημείο $t=1$. (Απ. (4/3, 1/3, 0)

4) Δείξτε ότι μια καμπύλη είναι ευθεία, αν όλες οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες.

5) Δείξτε ότι μια καμπύλη είναι ευθεία εάν τα διανύσματα $\mathbf{r}'(t)$ και $\mathbf{r}''(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα για κάθε t.

6) Βρείτε την καμπυλότητα κ και την στρέψη τ κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)=(t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

(Απ. $\kappa=\dfrac{\sqrt{2+\cos^2 t-2\cos t}}{\left(\sqrt{3-2\cos t}\right)^3}$, $\tau=\dfrac{-1}{2+\cos^2 t-2\cos t}$)

7) Δείξτε ότι η καμπύλη: $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(1+t)/t\,\mathbf{j}+(1-t^2)/t\,\mathbf{k}$ βρίσκεται πάνω σε επίπεδο και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου.

8) Βρείτε την γενική μορφή της συνάρτησης $f(t)$, για την οποία η καμπύλη: $\mathbf{r}(t)=\alpha(\cos t)\mathbf{i}+\alpha(\sin t)\mathbf{j}+f(t)\mathbf{k}$ είναι επίπεδη είναι επίπεδη και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου. (Απ. $f(t)=\mathrm{A}\sin t+\mathrm{B}\cos t+\Gamma$)

9) Δίνεται η κυκλική έλικα $\mathbf{r}(t)=\mathrm{R}\cos t\,\mathbf{i}+\mathrm{R}\sin T\,\mathbf{j}+\mathrm{b}t\mathbf{k}$. Να υπολογισθεί ο λόγος τ/κ, όπου τ η στέψη και κ η καμπυλότητα της έλικας. (Απ. τ/κ=b/R)

10) Έστω α>β>γ. Να αποδειχθεί ότι το ελλειψοειδές $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$ τέμνεται από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=\beta^2$ κατά δυο επίπεδες καμπύλες. Να προσδιοριστεί το είδος και οι εξισώσεις των.

(Απ. $\mathbf{r}(z)=\pm\dfrac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}}\,z\mathbf{i}\pm\dfrac{\beta}{\gamma}\sqrt{1-\dfrac{(\alpha^2-\gamma^2)}{(\alpha^2-\beta^2)}z^2}\,\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, μεσημβρινοί της σφαίρας).

11) Έστω η καμπύλη Κ με τυχαία παραμέτριση $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Να εκφραστούν τα διανύσματα **T**, **N**, **B** και **K** συναρτήσει του *t*.