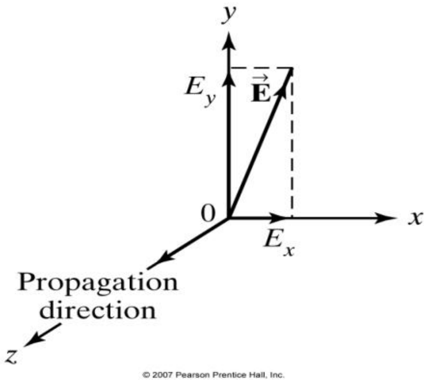
Διανύσματα Jones

Κάθε ΗΜ κύμα περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{k}$ (διάνυσμα κατεύθυνσης) και από το επίπεδο πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$.



*Αναπαράσταση στιγμιαίου διανύσματος **E** κύματος φωτός που ταξιδεύει στη διεύθυνση +z*

Για διεύθυνση διάδοσης z, το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = E_{\mathrm{x}}\mathbf{i} + E_{\mathrm{y}}\mathbf{j}$$

όπου $\quad E_x = E_{o\mathrm{x}} e^{i(kz-\omega t+\varphi_{\mathrm{x}})} \quad$ και $\quad E_y = E_{oy} e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}$

δηλαδή

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{i}E_{o\mathrm{x}}e^{i\varphi_{\mathrm{x}}} + \mathbf{j}E_{oy}e^{i\varphi_y}\right]e^{i(kz-\omega t)} \quad = \quad \tilde{\mathbf{E}}_o e^{i(kz-\omega t)}$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \left[\mathbf{i}E_{o\mathrm{x}}e^{i\varphi_{\mathrm{x}}} + \mathbf{j}E_{oy}e^{i\varphi_y}\right]$$

το ***μιγαδικό πλάτος*** του πολωμένου κύματος.

Αφού η κατάσταση πόλωσης του φωτός, δηλ. του **E,** καθορίζεται πλήρως από το πλάτος και τη φάση των συνιστωσών E_{ox}, E_{oy}, φ_x, φ_y, για τη μελέτη του όλου προβλήματος της πόλωσης θα επικεντρωθούμε στο ***μιγαδικό πλάτος*** $\tilde{\mathbf{E}}_o$ γραμμένο υπό μορφή πίνακα δύο στοιχείων (***διάνυσμα Jones*****):**

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{o\mathrm{x}} \\ \tilde{E}_{o\mathrm{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{o\mathrm{x}}e^{i\varphi_{\mathrm{x}}} \\ E_{o\mathrm{y}}e^{i\varphi_{\mathrm{y}}} \end{bmatrix}$$

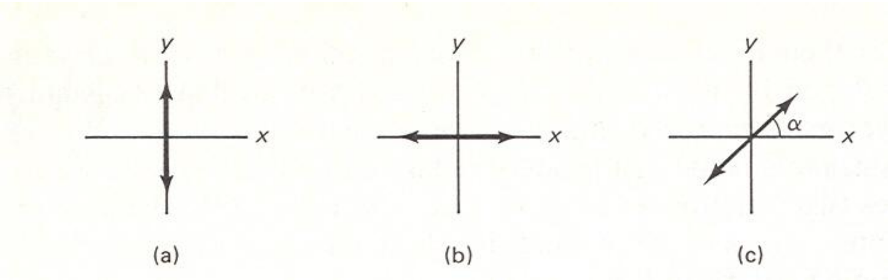
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ***Γραμμικά πολωμένο** κύμα φωτός με επίπεδο ταλάντωσης του* **E** ***κατακόρυφο** (άξονας y), διαδίδεται κατά μήκος του +z άξονα.*

Στην περίπτωση αυτή (*Σχ. α*) το πεδίο E μπορεί να παρασταθεί με:
$E_{ox} = 0$, $E_{oy} = A$, και εφόσον δεν υπάρχει E_x συνιστώσα, μπορεί να τεθεί χάριν ευκολίας $\varphi_y = 0$. Τότε το αντίστοιχο ***διάνυσμα Jones*** γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\varphi_x} \\ E_{oy}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{oy}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και κατά τη διάδοση του κύματος, το **E** ταλαντώνεται στην $\pm$ y διεύθυνση.



Διανύσματα E γραμμικά πολωμένου φωτός με διαφορετικούς προσανατολισμούς.
Το φώς διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z

Αν επιπλέον, ενδιαφέρον έχει μόνο η κατάσταση πόλωσης, το πλάτος A μπορεί να τεθεί ίσο με τη μονάδα οπότε το ***διάνυσμα Jones*** για κατακόρυφη πόλωση θα πάρει την απλοποιημένη μορφή $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ που ονομάζεται ***κανονικοποιημένη μορφή*** του ***διανύσματος Jones.***

Γενικά, ένα διάνυσμα $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ εκφράζεται σε ***κανονικοποιημένη μορφή*** όταν:

$$\left|a^2\right| + \left|b^2\right| = 1$$

- ***Γραμμικά πολωμένο** κύμα φωτός με επίπεδο ταλάντωσης του* **E** ***οριζόντιο** (άξονας x), διαδίδεται κατά μήκος του +z άξονα.*

Στην περίπτωση αυτή (*Σχ.b*) το πεδίο E μπορεί να παρασταθεί με:
$E_{ox} = A$, $E_{oy} = 0$, και εφόσον δεν υπάρχει E_y συνιστώσα, μπορεί να τεθεί χάριν ευκολίας $\varphi_x = 0$. Τότε το αντίστοιχο ***διάνυσμα Jones*** γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\varphi_x} \\ E_{oy}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\varphi_x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και κατά τη διάδοση του, το **E** ταλαντώνεται στην $\pm$ x διεύθυνση (*Σχ. b*).

- ***Γραμμικά πολωμένο*** ***κύμα φωτός με επίπεδο ταλάντωσης του* E *να σχηματίζει γωνία α με τον άξονα x. Το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του z άξονα.***

Σε αυτή τη γενική περίπτωση (*Σχ. c*), προκειμένου το διάνυσμα **E** να ταλαντώνεται όπως δείχνει το Σχήμα σε σταθερή γωνία *α* ως προς τον άξονα *x*, θα πρέπει οι δύο κάθετες συνιστώσες $\tilde{E}_{ox}$ και $\tilde{E}_{oy}$ να ταλαντώνονται σε φάση. Έτσι, αφού η σχετική φάση είναι μηδέν, θέτουμε $\varphi_x = \varphi_y = 0$. Επίσης προκειμένου το πλάτος της συνισταμένης να είναι A, τα πλάτη των κάθετων συνιστωσών θα πρέπει να είναι:

$$E_{ox} = A\cos a \quad \text{και} \quad E_{oy} = A\sin a.$$

Τώρα το ***διάνυσμα Jones*** γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\varphi_x} \\ E_{oy}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cos a \\ A\sin a \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix}$$

και κατά τη διάδοση του, το **E** ταλαντώνεται υπό γωνία α ως προς τη x διεύθυνση.

Για την κανονικοποιημένη μορφή του διανύσματος θέτουμε A = 1, αφού

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Προφανώς, από τη γενική αυτή περίπτωση προκύπτουν οι δύο προηγούμενες μορφές της κατακόρυφης και οριζόντιας πόλωσης για $\alpha = 90^o$ και $\alpha = 0^o$ αντίστοιχα, υπό την προϋπόθεση ότι και οι δύο κάθετες συνιστώσες ταλαντώνονται σε φάση.

Εφαρμογές

Για $\alpha = 45^o$ προκύπτει:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{45} = \begin{bmatrix} \cos 45^o \\ \sin 45^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ενώ για $\alpha = 60^o$ προκύπτει:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{60} = \begin{bmatrix} \cos 60^o \\ \sin 60^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

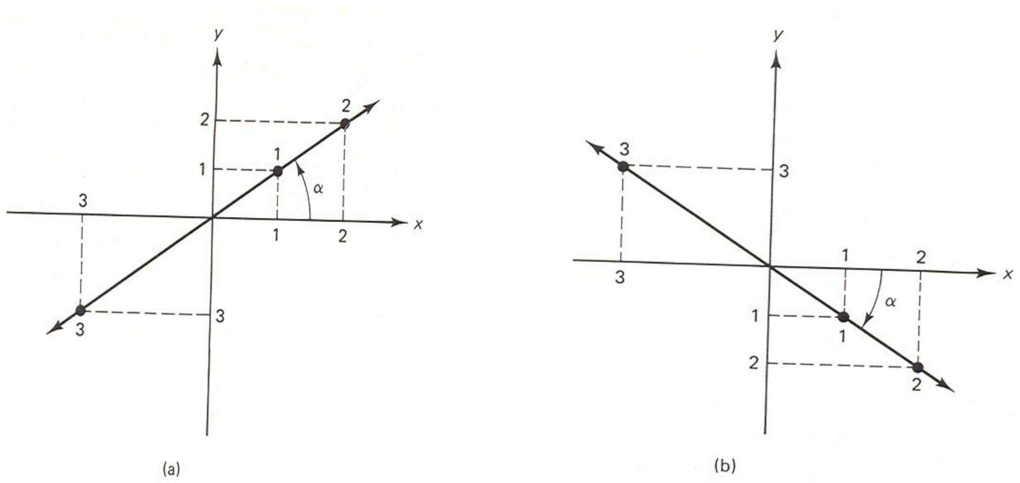
Εναλλακτικά, αν δοθεί ένα διάνυσμα $\tilde{E}_o = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, όπου τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, η κλίση του αντίστοιχου *γραμμικά πολωμένου* φωτός θα δίνεται από τη σχέση

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{E_{oy}}{E_{ox}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ανάλογα με τα πρόσημα των συνιστωσών E_{oy}, E_{ox} :

- ***Θετική τιμή της γωνίας α*** σημαίνει κάθετες ταλαντώσεις των E_{oy}, E_{ox} ***σε φάση*** και παραγωγή γραμμικά πολωμένου φωτός, με τα διανύσματα **E** να κείνται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο (*Σχ. α*)

- ***Αρνητική τιμή της γωνίας α*** σημαίνει κάθετες ταλαντώσεις των E_{oy}, E_{ox} ***κατά 180^o εκτός φάσης*** και παραγωγή γραμμικά πολωμένου φωτός, με τα διανύσματα **E** να ταλαντώνονται 180^o εκτός φάσης στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο(*Σχ. b*).



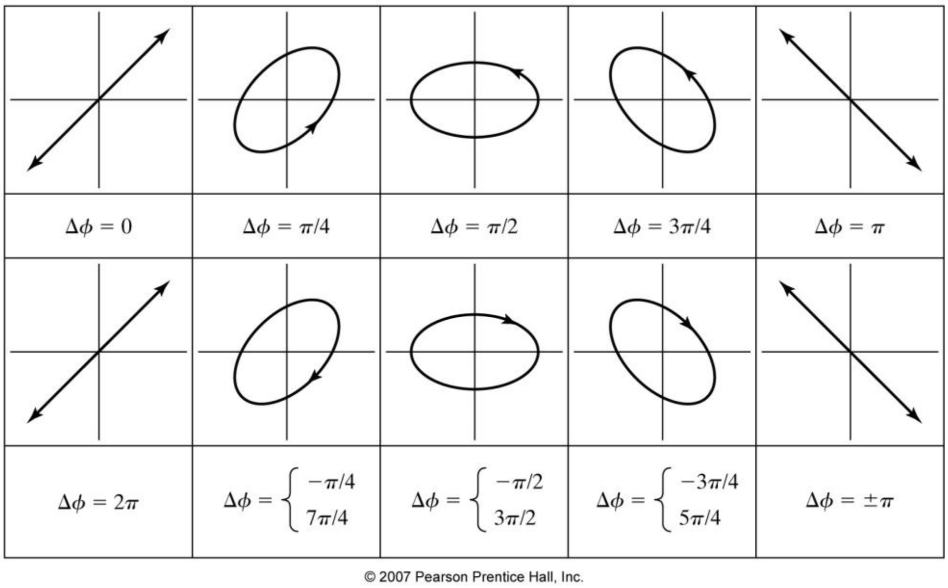
*(a) Κάθετες ταλαντώσεις σε φάση παράγουν γραμμικά πολωμένο φως με διανύσματα **E** στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο*

*(b) Κάθετες ταλαντώσεις 180^o εκτός φάσης παράγουν γραμμικά πολωμένο φως με διανύσματα **E** στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο*

Συμπερασματικά: ένα ***διάνυσμα Jones*** $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, με τα α και b πραγματικούς μη μηδενικούς αριθμούς, παριστά *γραμμικά πολωμένο φως* με γωνία κλίσης $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$

Για τον προσδιορισμό της συνισταμένης ταλάντωσης δύο κάθετων συνιστωσών, πρέπει να καθορισθεί η κατάλληλη ***εικόνα Lissajous:***

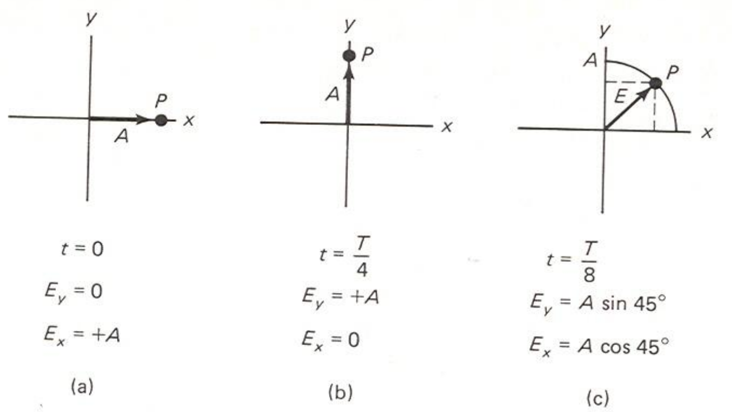
Αν η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων είναι διαφορετική από 0 ή π, το συνιστάμενο διάνυσμα E διαγράφει έλλειψη αντί ευθείας γραμμής *(η ευθεία και ο κύκλος είναι ειδικές περιπτώσεις της έλλειψης)***.**



Εικόνες Lissajous ως συνάρτηση της σχετικής φάσης ορθογωνίων ταλαντώσεων άνισου πλάτους. Γωνίες μεγαλύτερες από 180^o μπορεί να παριστούν γωνία καθυστέρησης μικρότερη από 180^o. Σε όλες τις εικόνες, κατά συνθήκη, έχει θεωρηθεί ως διαφορά φάσης η $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$.

Έστω $E_{ox} = E_{oy} = A$ και ότι η E_{ox} προηγείται της E_{oy} κατά π/2.

Όταν η E_{ox} φθάνει στη μέγιστη μετατόπιση $+A$, η E_y είναι μηδέν. Ένα τέταρτο της περιόδου αργότερα, $E_x = 0$ και $E_y = +A$ κ.ο.κ.



*Στιγμιότυπα της συνιστάμενης ταλάντωσης του **E** που οφείλεται σε ορθογώνιες ταλαντώσεις ίσου μέτρου και διαφοράς φάσης 90^o. Το σημείο P παριστάνει τη θέση της συνισταμένης. Στο (c) φαίνεται η κυκλική διαδρομή του **E**. Το διάνυσμα E περιστρέφεται αριστερόστροφα.*

Σημείωση:

Σε όλες τις περιπτώσεις που η E_x προηγείται της E_y, θα πρέπει να θέτουμε $\varphi_y > \varphi_x$. Αυτή η φαινομενική αναντιστοιχία προκύπτει από ***την επιλογή μας για τη φάση*** στη γραφή των εξισώσεων του πεδίου **E**:

$$E_x = E_{ox} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)} \quad \text{και} \quad E_y = E_{oy} e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)}$$

όπου ο χρονικά εξαρτώμενος όρος στον εκθέτη είναι ***αρνητικός***.

Παράδειγμα:

Έστω ότι στο $z = 0$ επιλέγουμε $\varphi_x = 0$ και $\varphi_y = \varepsilon$ έτσι ώστε $\varphi_y > \varphi_x$.
Οι προηγούμενες εξισώσεις γράφονται;

$$E_x = E_{ox} e^{-i\omega t} \qquad \text{και} \qquad E_y = E_{oy} e^{-i(\omega t - \varepsilon)}$$

Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από το ε υποδηλώνει μια καθυστέρηση ε της y συνιστώσας ταλάντωσης σε σχέση με τη x συνιστώσα. Πράγματι οι παραπάνω εξισώσεις παριστούν τις διαδοχικές εικόνες του προηγούμενου σχήματος αν πάρουμε τα πραγματικά μέρη των εξισώσεων και θέσουμε $E_{ox} = E_{oy} = A$ και $\varepsilon = \pi/2$:

$$E_x = A\cos\omega t \qquad \text{και} \qquad E_y = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A\sin\omega t$$

Επίσης, αφού

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = A^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = A^2$$

το άκρο του συνιστάμενου διανύσματος διαγράφει κύκλο ακτίνας A.

- ***Διάνυσμα Jones*** *όταν:*

E_x προηγείται της E_y, με $E_{ox} = E_{oy} = A$, $\varphi_x = 0$ και $\varphi_y = \pi/2$

Σε αυτή την περίπτωση

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\varphi_x} \\ E_{oy} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ που για $\varphi = \pi/2$ γίνεται

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i1 = i$$

και το ***κανονικοποιημένο διάνυσμα Jones*** βρίσκεται όταν κάθε στοιχείο διαιρεθεί με την κατάλληλη ποσότητα ώστε το *A* να δώσει μονάδα.
Στην περίπτωσή μας, επειδή το πλάτος του διανύσματος *A* είναι

$$A = \sqrt{1^2 + |i^2|} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

η κατάλληλη ποσότητα είναι το $\sqrt{2}$, οπότε το κανονικοποιημένο <u>*διάνυσμα Jones*</u> είναι το

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$ ***ΑΚΠ φως***

που παριστάνει ***Αριστερόστροφα Κυκλικά Πολωμένο φως***, αφού παρατηρώντας το <u>να έρχεται προς το μέρος μας</u>, περιστρέφεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού.

- <u>***Διάνυσμα Jones***</u> *όταν:*

E_y προηγείται της E_x, με $E_{ox} = E_{oy} = A$, $\varphi_x = 0$ και $\varphi_y = -\pi/2$

Σε αυτή την περίπτωση,

με όμοιο ακριβώς τρόπο, όταν E_y προηγείται της E_x κατά $\pi/2$, το αποτέλεσμα είναι κυκλικά πολωμένο φως με περιστροφή σύμφωνη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού (***Δεξιόστροφα Κυκλικά Πολωμένο φως***). Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εξίσωση το π/2 με το (-π/2) προκύπτει:

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$ ***ΔΚΠ φως***

<u>***Σημείωση:***</u> Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις <u>κυκλικά πολωμένου φωτός</u>, το ένα από τα στοιχεία του ***διανύσματος Jones*** είναι καθαρά <u>***φανταστικό***</u> ενώ το <u>μέτρο και των δύο</u> είναι <u>***ακριβώς το ίδιο***</u>.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, λόγω της μαθηματικής μορφής του διανύσματος, ο πραγματικός χαρακτήρας του φωτός δεν είναι πάντοτε άμεσα προφανής. Παράδειγμα το *διάνυσμα Jones* $\begin{bmatrix}2i\\ 2\end{bmatrix}$ το οποίο παριστάνει δεξιόστροφα πολωμένο φως, αφού

$$\begin{bmatrix}2i\\ 2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix} = 2i\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

Ο παράγοντας μπροστά από τον πίνακα στο *διάνυσμα Jones*, επηρεάζει το πλάτος και, κατά συνέπεια, την <u>ακτινοβολία του φωτός</u> όχι όμως την κατάσταση πόλωσης. Έτσι τέτοιοι παράγοντες όπως το *2* ή το *2i*, <u>μπορεί να αγνοούνται εκτός από τις περιπτώσεις</u> που απαιτείται πληροφορία σχετική με την <u>ενέργεια του φωτός</u>.

- <u>***Διάνυσμα Jones***</u> *όταν:*

$$E_{ox} = A, \qquad E_{oy} = B$$

με διαφορά φάσης $\pi/2$ μεταξύ των δύο ορθογώνια ταλαντούμενων συνιστωσών.

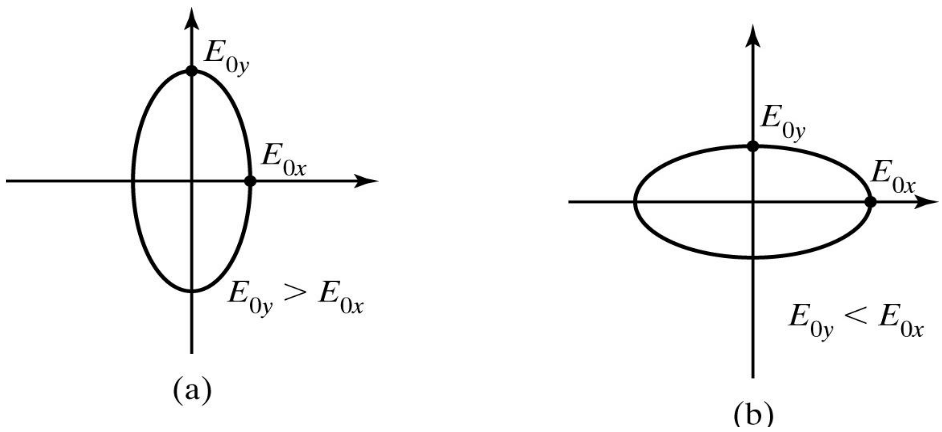
Σε αυτή την περίπτωση η γενική εξίσωση

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{o\,x} e^{i\varphi_x} \\ E_{o\,y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B e^{\pm i\pi/2} \end{bmatrix}$$

θα δώσει

$\begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$ για ***αριστερόστροφη περιστροφή*** και $\begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$ για ***δεξιόστροφη περιστροφή***

που αποτελούν και οι δύο περιπτώσεις ***ελλειπτικής πόλωσης*** με Δφ = π/2 και Δφ = 3π/2



Ελλειπτικά πολωμένο φως για Δφ=π/2

<u>Σημείωση:</u>

- Καθυστέρηση φάσης κατά π/2 ισοδυναμεί με προήγηση κατά 3π/2.
- Η έλλειψη προσανατολίζεται με το μεγάλο άξονα κατά μήκος του x ή y άξονα ανάλογα με το σχετικό μέτρο των E_{ox} και E_{oy}.
- ***<u>Δεξιόστροφη</u>*** περιστροφή συμβαίνει όταν η E_y προηγείται της E_x.
- ***<u>Αριστερόστροφη</u>*** περιστροφή συμβαίνει όταν η E_x προηγείται της E_y.
- ***<u>Διάνυσμα Jones</u>*** με στοιχεία <u>άνισου μέτρου</u>, εκ των οποίων το ένα είναι καθαρά φανταστικό, παριστάνει ελλειπτικά πολωμένο φως, προσανατολισμένο κατά μήκος των αξόνων x και y.
- Το ***<u>κανονικοποιημένο διάνυσμα Jones</u>*** πρέπει τώρα να περιλαμβάνει μπροστά από τον πίνακα τον παράγοντα $1/\sqrt{A^2 + B^2}$.

➢ ***<u>Διάνυσμα Jones</u>*** *όταν:*

$E_{ox} = A,\qquad E_{oy} = b$, με διαφορά φάσης κάποια γωνία διαφορετική από *±mπ (γραμμική πόλωση)* ή *±(m+1/2)π* *(κυκλική ή ελλειπτική πόλωση προσανατολισμένη συμμετρικά στους άξονες x, y)*, με m = 1, 2, 3,….., και A , b θετικά.

Έστω ότι η E_x προηγείται της E_y , $\varphi_x = 0$ και $\varphi_y = \varepsilon$, οπότε $\varphi_y - \varphi_x = \varepsilon$.

Στην περίπτωση αυτή το *διάνυσμα Jones* γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} E_{o\mathrm{x}} e^{i\varphi_{\mathrm{x}}} \\ E_{o\mathrm{y}} e^{i\varphi_{\mathrm{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ be^{i\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Με τη βοήθεια του ***Θεωρήματος του Euler:***

$$be^{i\varepsilon} = b(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon) = B + iC$$

το <u>*διάνυσμα Jones*</u> *παίρνει τη μορφή*

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$

όπου το ένα στοιχείο είναι *μιγαδικός αριθμός* με *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος.

Το κανονικοποιημένο <u>*διάνυσμα Jones*</u> προκύπτει από τη διαίρεση με τον παράγοντα:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Αυτή η μορφή του <u>*διανύσματος Jones*</u> είναι η πλέον ***γενική μορφή*** (***αριστερόστροφης περιστροφής***) και περιέχει όλες τις περιπτώσεις που έχουν συζητηθεί μέχρι τώρα.

Με τη βοήθεια της Αναλυτικής Γεωμετρίας μπορεί να αποδειχθεί ότι η έλλειψη που δίνει το παραπάνω διάνυσμα Jones έχει κλίση γωνίας α ως προς τον άξονα x, η οποία προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2}$$

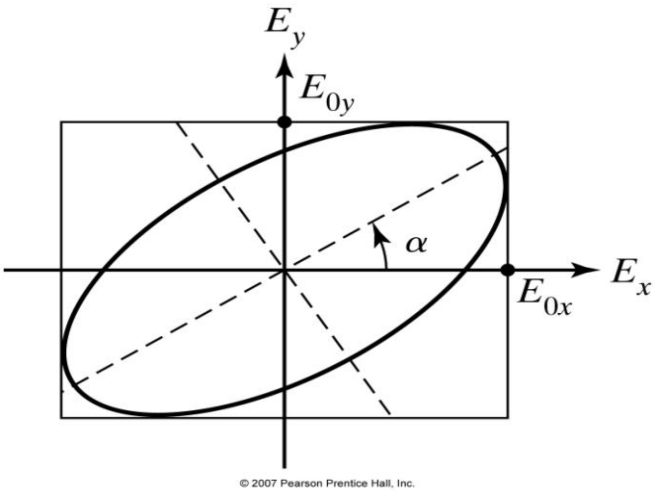
Η έλλειψη τοποθετείται σε ορθογώνιο με πλευρές $2E_{ox}$ και $2E_{oy}$.

Συναρτήσει των παραμέτρων A, B και C, η παραγωγή της προηγούμενα αναφερθείσας ***γενικής εξίσωσης:***

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$

δείχνει καθαρά ότι:

$$E_{ox} = A, \qquad E_{oy} = \sqrt{B^2 + C^2}, \qquad \varepsilon = \tan^{-1}(C/B)$$



Ελλειπτικά πολωμένο φως προσανατολισμένο σε γωνία α ως προς τον άξονα x.

Παράδειγμα

Να αναλυθεί το *διάνυσμα Jones* $\begin{bmatrix} 3 \\ 2+i \end{bmatrix}$

και να δειχθεί ότι παριστάνει ελλειπτικά πολωμένο φως.

Λύση

Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις:

$$\varphi_y - \varphi_x = \varepsilon = \tan^{-1}(C/B) = \tan^{-1}(1/2) = 26.6^o$$

Αφού

$$E_{ox} = A = 3, \qquad E_{oy} = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

η γωνία κλίσης του άξονα θα είναι:

$$\tan 2a = \frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2(3)(\sqrt{5})\cos 26.6^o}{9-5} = 35.8^o$$

και η απεικόνιση της είναι σύμφωνη με το προηγούμενο σχήμα.

Η εξίσωση της έλλειψης με μεγαλύτερη ακρίβεια δίνεται από τη γνωστή μας εξίσωση:

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos\varepsilon=\sin^2\varepsilon$$

που στο παράδειγμα μας γίνεται

$$\frac{E_x^2}{9}+\frac{E_y^2}{5}-0.267E_xE_y=0.2$$

Όταν το E_x καθυστερεί του E_y, η γωνία φάσης ε γίνεται αρνητική και οδηγεί σε ***διάνυσμα Jones*** που τώρα απεικονίζει ***δεξιόστροφη περιστροφή*** της μορφής

$$\tilde{\mathbf{E}}_o=\begin{bmatrix} A \\ B-iC \end{bmatrix}$$

Αυτή η μορφή ***διανύσματος Jones*** μαζί με την αντίστοιχη για ***αριστερόστροφη περιστροφή*** δηλ. την

$$\tilde{\mathbf{E}}_o=\begin{bmatrix} A \\ B+iC \end{bmatrix}$$

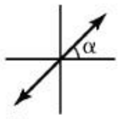
είναι οι πλέον γενικές μορφές του ***διανύσματος Jones*** και περιλαμβάνουν όλες τις περιπτώσεις που συζητήθηκαν προηγουμένως.

Ο παρακάτω ΠΙΝΑΚΑΣ περιέχει συνοπτικά τα περισσότερο γνωστά *διανύσματα Jones* στην κανονικοποιημένη μορφή τους, χωρίς αυτές να είναι και οι μοναδικές.

TABLE 14-1 SUMMARY OF JONES VECTORS $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$

I. Linear Polarization $(\Delta\varphi = m\pi)$

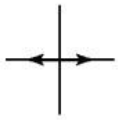
General:



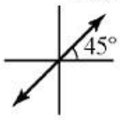
$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

Vertical: $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

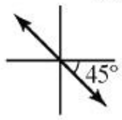
Horizontal: $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



At + 45°: $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



At −45°: $\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



II. Circular Polarization $\left(\Delta\phi = \dfrac{\pi}{2}\right)$

Left:

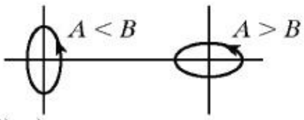
$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Right:

$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

III. Elliptical Polarization

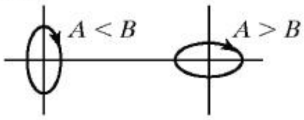
Left:



$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$ $A > 0, B > 0$

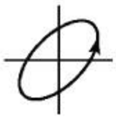
$(\Delta\phi = (m + 1/2)\,\pi)$

Right:



$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$ $A > 0, B > 0$

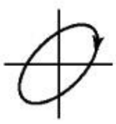
Left:



$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$ $A > 0, C > 0$

$\left(\Delta\phi \neq \begin{cases} m\pi \\ (m + 1/2)\pi \end{cases}\right)$

Right:



$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$ $A > 0, C > 0$

Παρατηρήσεις:

Οι μορφές των διανυσμάτων Jones που περιέχονται στον ΠΙΝΑΚΑ δεν είναι μοναδικές.

Κάθε διάνυσμα Jones μπορεί να πολλαπλασιασθεί με μια πραγματική σταθερά, **αλλάζοντας έτσι το πλάτος όχι όμως την κατάσταση πόλωσης.**

- Τα διανύσματα του ΠΙΝΑΚΑ έχουν πολλαπλασιασθεί με κατάλληλους παράγοντες, όπου είναι αναγκαίο, έτσι ώστε να εμφανίζονται στην ***κανονικοποιημένη τους μορφή.*** Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ παριστάνει επίσης γραμμικά πολωμένο φως, πλάτους $2\sqrt{2}$ που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x.

- Κάθε διάνυσμα του ΠΙΝΑΚΑ μπορεί να πολλαπλασιασθεί με ένα παράγοντα της μορφής $e^{i\varphi}$ με αποτέλεσμα προώθηση της φάσης κάθε στοιχείου κατά φ, δηλ.

  $$\varphi_x \to \varphi_x + \varphi \quad \& \quad \varphi_y \to \varphi_y + \varphi \,.$$

  Αφού η διαφορά φάσης σε αυτή τη διαδικασία παραμένει αμετάβλητη, το νέο διάνυσμα παραμένει στην ίδια κατάσταση πόλωσης.

- Για όλα τα διανύσματα του ΠΙΝΑΚΑ έχει θεωρηθεί αυθαίρετα $\varphi_\chi = 0$.

Η χρησιμότητα αυτών των διανυσμάτων Jones θα διαφανεί στους ***Πίνακες Jones*** οι οποίοι παριστάνουν και περιγράφουν ***πολωτικά στοιχεία***.

Οπωσδήποτε, σε αυτό το σημείο, ***είναι επίσης δυνατόν να υπολογισθεί το αποτέλεσμα της υπέρθεσης δύο ή περισσότερων πολωτικών καταστάσεων με πρόσθεση των διανυσμάτων Jones.*** Για παράδειγμα, πρόσθεση ***αριστερόστροφα*** και ***δεξιόστροφα*** κυκλικά πολωμένου φωτός, δίνει

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ i-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. ***γραμμικά πολωμένο φως*** διπλάσιου πλάτους.

Συμπέρασμα:

Αυτό το γραμμικά πολωμένο φως μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση ενός αριστερόστροφου και ενός δεξιόστροφου κυκλικά πολωμένου φωτός.

Παράδειγμα:

Υπέρθεση κάθετα και οριζόντια γραμμικά πολωμένου φωτός σε φάση:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το αποτέλεσμα είναι γραμμικά πολωμένο φως με κλίση 45^o. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πρόσθεση ορθογώνιων συνιστωσών γραμμικά πολωμένου φωτός δεν είναι μη πολωμένο φως, ακόμη και αν το μη πολωμένο φως συμβολίζεται με αυτές τις συνιστώσες. ***Δεν υπάρχει διάνυσμα Jones που να παριστάνει μη πολωμένο ή μερικά πολωμένο φως.***