Μαθηματική Περιγραφή Πολωτών:

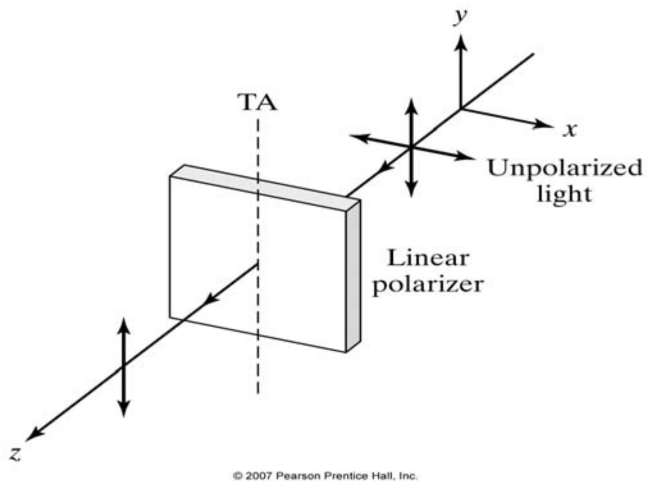
Πίνακες Jones

Οι πολωτές είναι οπτικά στοιχεία τα οποία διαμορφώνουν την κατάσταση πόλωσης του διερχόμενου φωτός.

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα που επιτυγχάνουν, οι πολωτές κατατάσσονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

<u>Γραμμικός πολωτής (Linear Polarizer)</u>

Απομακρύνει επιλεκτικά όλο ή το μεγαλύτερο μέρος του ταλαντούμενου πεδίου **Ε** δοθείσας διεύθυνσης ενώ επιτρέπει να διέρχονται ταλαντώσεις κάθετης προς αυτήν διεύθυνσης.



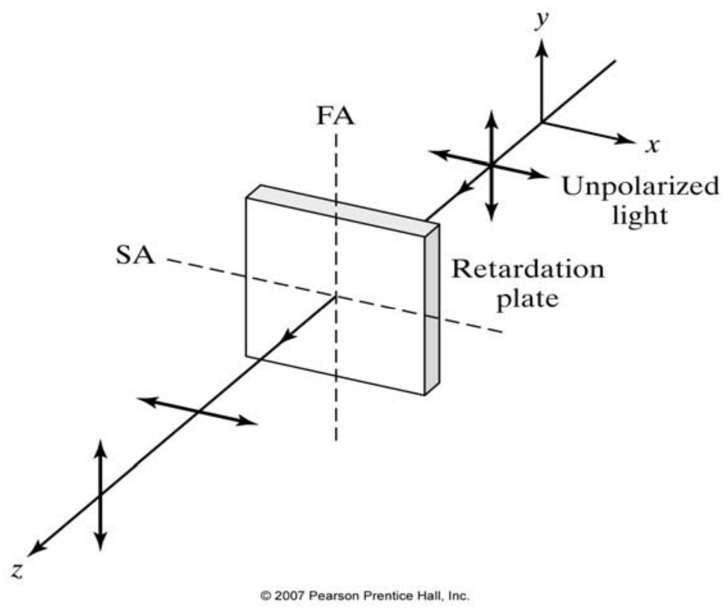
Λειτουργία γραμμικού πολωτή

Στο Σχήμα περιγράφεται η διέλευση μη πολωμένου φωτός διαμέσου επίπεδου πολωτή κατά την +z διεύθυνση. Εδώ, ο άξονας διάδοσης (TA – *Transmission Axis*) είναι κατακόρυφος. Το μη πολωμένο φως παριστάνεται με δύο κάθετες (x και y) ταλαντώσεις, αφού οποιαδήποτε διεύθυνση ταλάντωσης μπορεί να αναλυθεί κατά μήκος αυτών των δύο συνιστωσών.

Το διαδιδόμενο φως περιλαμβάνει συνιστώσες μόνο κατά μήκος της TA διεύθυνσης και κατά συνέπεια είναι γραμμικά πολωμένο κατακόρυφα (y-διεύθυνση). Οι οριζόντιες συνιστώσες του αρχικού φωτός έχουν απομακρυνθεί με απορρόφηση.

<u>Πλακίδιο Καθυστέρησης Φάσης (Phase Retarder)</u>

Το πλακίδιο καθυστέρησης φάσης δεν απομακρύνει καμία από τις ορθογώνιες συνιστώσες του ταλαντούμενου πεδίου Ε, αλλά εισάγει μια διαφορά φάσης μεταξύ αυτών. Αν φως που αντιστοιχεί σε κάθε διεύθυνση ταλάντωσης ταξιδεύει με διαφορετική ταχύτητα μέσα σε ένα τέτοιο πλακίδιο καθυστέρησης, θα υπάρχει αθροιστική διαφορά φάσης Δφ μεταξύ των δύο κυμάτων καθώς αυτά εξέρχονται.

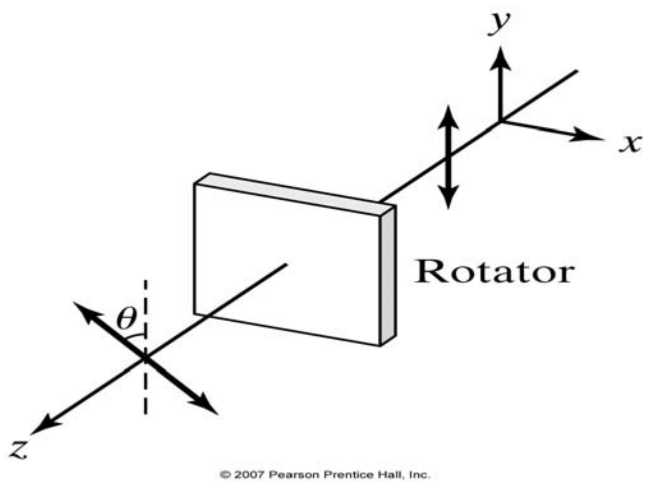


Λειτουργία πλακιδίου καθυστέρησης φάσης

Στο Σχήμα περιγράφεται η επίδραση πλακιδίου καθυστέρησης φάσης σε μη πολωμένο φως και για την περίπτωση που η κατακόρυφη συνιστώσα ταξιδεύει μέσα στο πλακίδιο ταχύτερα από την οριζόντια συνιστώσα. Αυτό σημειώνεται με τον «χωρικό» διαχωρισμό των δύο συνιστωσών πάνω στον οπτικό άξονα μετά τη διέλευση από το πλακίδιο. Οι δύο διευθύνσεις, του ταχύ άξονα (*FA – Fast Axis*) και του αργού άξονα (*SA – Slow Axis*) του πλακιδίου, σημειώνονται στο Σχήμα. Όταν η καθαρή διαφορά φάσης είναι $\Delta\varphi = 90^o$, το πλακίδιο ονομάζεται ***πλακίδιο λ/4,*** ενώ όταν είναι $\Delta\varphi = 180^o$ ονομάζεται ***πλακίδιο λ/2***.

<u>Πλακίδιο Περιστροφής (Rotator)</u>

Το πλακίδιο αυτό έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή της διεύθυνσης γραμμικά πολωμένου φωτός, που πέφτει πάνω του, κατά συγκεκριμένη γωνία. Κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο φως που πέφτει σε πλακίδιο περιστροφής φαίνεται στο Σχήμα.



Λειτουργία πλακιδίου περιστροφής

Με βάση τα διανύσματα Jones θα γίνει μια προσπάθεια να δημιουργηθούν στοιχεία Πίνακα που παράγουν μαθηματικά το ίδιο αποτέλεσμα.

<u>Γραμμικός πολωτής με ΤΑ κατακόρυφο</u>

Έστω γραμμικός πολωτής με άξονα διάδοσης (ΤΑ) κατακόρυφο όπως φαίνεται σε προηγούμενο <u>αντίστοιχο</u> Σχήμα.

Έστω ότι ένας 2 x 2 Πίνακας παριστάνει τη λειτουργία του πολωτή πάνω σε κατακόρυφα πολωμένο φως, και έστω ότι τα στοιχεία του πίνακα που πρέπει να προσδιοριστεί παριστάνονται με τα γράμματα *a, b, c,* και *d*. Το προκύπτον διαδιδόμενο ή παραγόμενο φως σε αυτή την περίπτωση πρέπει πάλι να είναι κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο φως. Συμβολικά,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αυτή η εξίσωση Πίνακα είναι ισοδύναμη με τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$$
$$c \cdot 0 + d \cdot 1 = 1$$

από την οποία συμπεραίνεται ότι $b = 0$ και $d = 1$. Για τον προσδιορισμό των στοιχείων a και c, έστω ότι ο ίδιος πολωτής λειτουργεί σε οριζόντια πολωμένο φως. Τώρα δεν περνάει καθόλου φως, ή

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες αλγεβρικές εξισώσεις

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$$
$$c \cdot 1 + d \cdot 0 = 0$$

από τις οποίες προκύπτει a = 0 και c = 0. Συμπεραίνεται λοιπόν ότι ο κατάλληλος πίνακας είναι:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που παριστάνει γραμμικό πολωτή με ΤΑ κατακόρυφο.

<u>Γραμμικός πολωτής με ΤΑ οριζόντιο</u>

Ο πίνακας για γραμμικό πολωτή με ΤΑ οριζόντιο, αποκτάται με παρόμοιο τρόπο και είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Γραμμικός πολωτής με ΤΑ 45^o ως προς τον x άξονα</u>

Γραμμικά πολωμένο φως στην ίδια διεύθυνση – καθώς και στην κάθετη – προς τον ΤΑ περνάει διαμέσου του πολωτή. Ακολουθώντας την προηγούμενη προσέγγιση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ c + d &= 1 \\ a - b &= 0 \\ c - d &= 0 \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει $\alpha = b = c = d = ½$. Οπότε ο σωστός Πίνακας είναι:

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Γραμμικός πολωτής με ΤΑ θ^o ως προς τον x άξονα</u>

Κατά τον ίδιο τρόπο ο Πίνακας σε αυτή τη γενική περίπτωση προκύπτει

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

στον οποίο περιέχονται ως ειδικές περιπτώσεις οι δύο προηγούμενες (θ = 90^o και θ = 45^o).

Πλακίδιο καθυστέρησης φάσης

Εδώ θα πρέπει να κατασκευάσουμε Πίνακα που να μετασχηματίζει τα στοιχεία

$$E_{ox}e^{i\varphi_x} \quad \rightarrow \quad E_{ox}e^{i(\varphi_x+\varepsilon_x)}$$
$$\kappa\alpha\iota$$
$$E_{oy}e^{i\varphi_y} \quad \rightarrow \quad E_{oy}e^{i(\varphi_y+\varepsilon_y)}$$

Προσεκτική διερεύνηση δείχνει ότι αυτό ολοκληρώνεται από τη λειτουργία του Πίνακα

$$\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\varphi_x} \\ E_{oy}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i(\varphi_x+\varepsilon_x)} \\ E_{oy}e^{i(\varphi_y+\varepsilon_y)} \end{bmatrix}$$

Έτσι, η γενική μορφή του Πίνακα που αναπαριστά ένα πλακίδιο καθυστέρησης θα είναι

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$$

όπου ε_x και ε_y (που μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές ποσότητες) παριστούν το προχώρημα στη φάση των συνιστωσών E_x και E_y του προσπίπτοντος φωτός.

Πλακίδιο λ/4 (Quarter-Wave-Plate – QWP)

Σε αυτή την περίπτωση είναι $|\Delta\varepsilon| = \pi/2$

και θα πρέπει να διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία

$$\varepsilon_y - \varepsilon_x = \pi/2 \qquad \textit{(SA κατακόρυφος)}$$

(εδώ προηγείται η x συνιστώσα → FA οριζόντιος)

από την περίπτωση

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \pi/2 \qquad \textit{(SA οριζόντιος)}$$

(εδώ προηγείται η y συνιστώσα → FA κατακόρυφος)

Πλακίδιο λ/4 (SA κατακόρυφος)

Έστω ότι $\varepsilon_x = -\pi/4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \varepsilon_y = \pi/4 \;\rightarrow\; \varepsilon_y - \varepsilon_x = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2$ τότε προκύπτει μια κοινή μορφή πίνακα συμμετρικής μορφής:

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

όπου στον τελευταίο 2x2 πίνακα έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση $e^{i\pi/4} = e^{-i\pi/4} e^{i\pi/2}$ και η ταυτότητα $e^{i\pi/2} = i$

Πλακίδιο λ/4 (SA οριζόντιος)

Τώρα $\varepsilon_x = \pi/4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \varepsilon_y = -\pi/4$ οπότε

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Πλακίδιο λ/2 (Half-Wave-Plate – HWP)

Αντίστοιχοι Πίνακες για ***πλακίδια λ/2*** όπου $|\Delta\varepsilon| = \pi$ είναι:

Πλακίδιο λ/2 (SA κατακόρυφος)

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{-i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Πλακίδιο λ/2 (SA οριζόντιος)

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία των δύο παραπάνω Πινάκων είναι ***ταυτόσημα*** αφού προχώρημα της φάσης κατά π, από φυσική άποψη, ισοδυναμεί με καθυστέρηση κατά π. Μόνη διαφορά είναι οι παράγοντες μπροστά από τους πίνακες οι οποίοι διαμορφώνουν τις φάσεις όλων των στοιχείων του διανύσματος Jones με τον ίδιο τρόπο και κατά συνέπεια δεν επηρεάζουν την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η απαίτηση για ένα ***πλακίδιο περιστροφής*** κατά γωνία β είναι ότι ένα διάνυσμα E ταλαντούμενο γραμμικά σε γωνία θ, πρέπει να μετασχηματισθεί σε ένα άλλο που ταλαντώνεται γραμμικά σε γωνία (θ + β). Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του Πίνακα πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta+\beta) \\ \sin(\vartheta+\beta) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a\cos\vartheta + b\sin\vartheta &= \cos(\vartheta+\beta) \\ c\cos\vartheta + d\sin\vartheta &= \sin(\vartheta+\beta) \end{aligned}$$

που με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta+\beta) &= \cos\vartheta\cos\beta - \sin\vartheta\sin\beta \\ \sin(\vartheta+\beta) &= \sin\vartheta\cos\beta + \cos\vartheta\sin\beta \end{aligned}$$

δίνουν

$$\begin{aligned} a &= \cos\beta \qquad & b &= -\sin\beta \\ c &= \sin\beta \qquad & d &= \cos\beta \end{aligned}$$

έτσι ώστε ο ζητούμενος Πίνακας για *περιστροφή κατά γωνία +β* είναι

$$M = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Συνοπτικά όλα τα παραπάνω περιέχονται στον πίνακα:

TABLE 14-2 SUMMARY OF JONES MATRICES

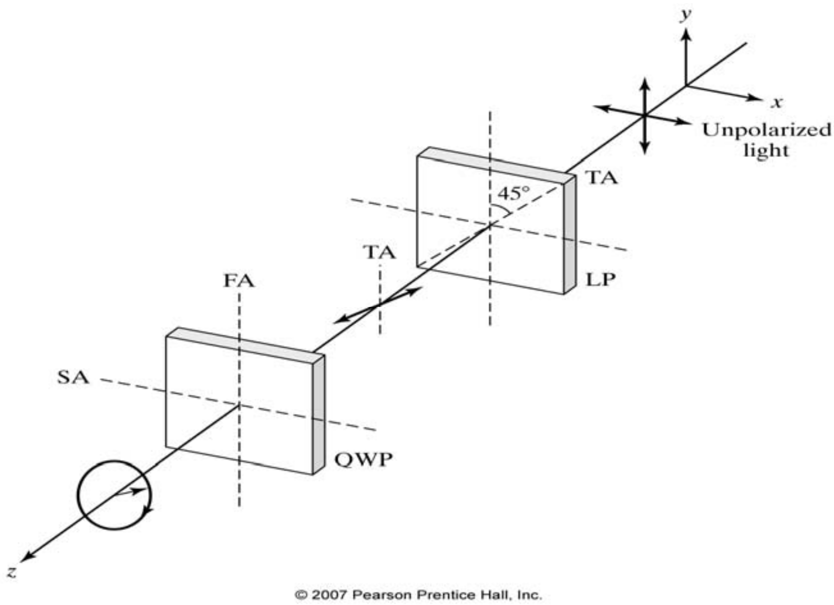
I. Linear polarizers					
TA horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	TA vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	TA at 45° to horizontal	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
II. Phase retarders					
General	$\begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix}$				
QWP, SA vertical	$e^{-i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$	QWP, SA horizontal	$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$		
HWP, SA vertical	$e^{-i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	HWP, SA horizontal	$e^{i\pi/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
III. Rotator					
Rotator	$(\theta \rightarrow \theta + \beta)$	$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$			

© 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

Παραγωγή κυκλικά πολωμένου φωτός με συνδυασμό γραμμικού πολωτή και πλακιδίου λ/4.

Έστω γραμμικός πολωτής (LP) παράγει φως ταλαντούμενο σε γωνία 45^o , το οποίο στη συνέχεια διαδίδεται διαμέσου του πλακιδίου λ/4 (QWP).



Παραγωγή δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένου φωτός

Στη διάταξη αυτή το φως που προσπίπτει πάνω στο πλακίδιο λ/4 διαιρείται ισόποσα μεταξύ ταχύ και αργού άξονα. Κατά την έξοδο, μια διαφορά φάσης 90^o δημιουργεί το κυκλικά πολωμένο φως.

Από Μαθηματική σκοπιά, η διαδικασία είναι ισοδύναμη με την επίδραση του Πίνακα πλακιδίου λ/4 πάνω στο διάνυσμα Jones του γραμμικά πολωμένου φωτός.

$$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\pi/4}\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

δίνοντας *δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως* πλάτους $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ φορές το πλάτος του αρχικά γραμμικά πολωμένου φωτός.

Αν εναλλαγούν ο ταχύς με τον αργό άξονα του πλακιδίου λ/4, με ίδιους υπολογισμούς καταλήγουμε σε *αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο* φως.

Παράδειγμα 2.

Διέλευση αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένου φωτός μέσα από πλακίδιο λ/8.

Λύση

Κατ' αρχάς απαιτείται ο προσδιορισμός του Πίνακα που παριστάνει το πλακίδιο λ/8. Το πλακίδιο αυτό εισάγει μια σχετική φάση 2π/8 = π/4 ή 45^o.

Έτσι, θέτοντας $\varepsilon_x = 0$ προκύπτει

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varepsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varepsilon_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Αυτός ο Πίνακας δρα πάνω στο διάνυσμα Jones του αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένου φωτός:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ie^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i3\pi/4} \end{bmatrix}$$

και το προκύπτον διάνυσμα Jones υποδηλώνει ότι το φως είναι ελλειπτικά πολωμένο και οι συνιστώσες είναι εκτός φάσης κατά 135^o.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του Euler για το $e^{i3\pi/4}$ προκύπτει

$$e^{i3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

και με βάση την τυπική γραφή γι' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$ *(γενική μορφή διανύσματος Jones)*

όπου A = 1, $B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Συγκρίνοντας αυτό τον Πίνακα με τη γενική μορφή

$$\tilde{\mathbf{E}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{o\mathrm{x}} \\ \tilde{E}_{o\mathrm{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{o\mathrm{x}} e^{i\varphi_{\mathrm{x}}} \\ E_{o\mathrm{y}} e^{i\varphi_{\mathrm{y}}} \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι $E_{ox} = 1$, $E_{oy} = 1$ και με τη βοήθεια της εξίσωσης

$$\tan 2a = \frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\varepsilon}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2}$$ προσδιορίζεται ότι $\alpha = -45^o$ *(E_x προηγείται της E_y).*