2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

1. Σφάλματα

Κάθε μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους χαρακτηρίζεται από μία αβεβαιότητα που ονομάζουμε **σφάλμα ,** το οποίο αναγράφεται με τη μορφή

Τιμή ± αβεβαιότητα

π.χ έστω ότι σε ένα πείραμα μετράμε την τάση στα άκρα μιας αντίστασης και βρίσκουμε ότι είναι μεταξύ 20.2 V και 20.4 V. Θα γράψουμε την εκτίμησή μας ως $20.3\text{V} \pm 0.1\text{V}$ όπου 20.3 είναι η περισσότερο πιθανή τιμή της τάσης και ±0.1 **το σφάλμα (η αβεβαιότητα)** της μέτρησης.

Με τον όρο σφάλμα δεν εννοούμε την απόκλιση της μέτρησής μας από την θεωρητικά αποδεκτή τιμή ούτε το πειραματικό λάθος. Η έννοια του σφάλματος αναφέρεται στην ακρίβεια της μέτρησης δηλαδή στην αβεβαιότητα των μετρήσεων την οποία εισάγουν

- τα όργανα μέτρησης
- η πειραματική διαδικασία και οι συνθήκες του πειράματος

Επειδή κατά την πειραματική διαδικασία υπάρχουν παράγοντες που υπεισέρχονται που δεν τους γνωρίζουμε ή δεν μπορούμε να τους λάβουμε υπόψιν (π.χ μεταβολή του g, της θερμοκρασίας) δεν μπορούμε πάντα να διορθώσουμε όλα τα σφάλματα. Ακόμα κι αν επαναλάβουμε τις μετρήσεις ενός μεγέθους, τα σφάλματα δεν μπορούν να εξαλειφθούν, μπορούμε όμως να οδηγηθούμε σε μία κατανομή των μετρούμενων τιμών που μπορεί να αναλυθεί συστηματικά με τη στατιστική.

Από την άλλη είναι εμφανές ότι τα σφάλματα πρέπει να υπολογίζονται ώστε να οδηγηθούμε σε ορθά συμπεράσματα.

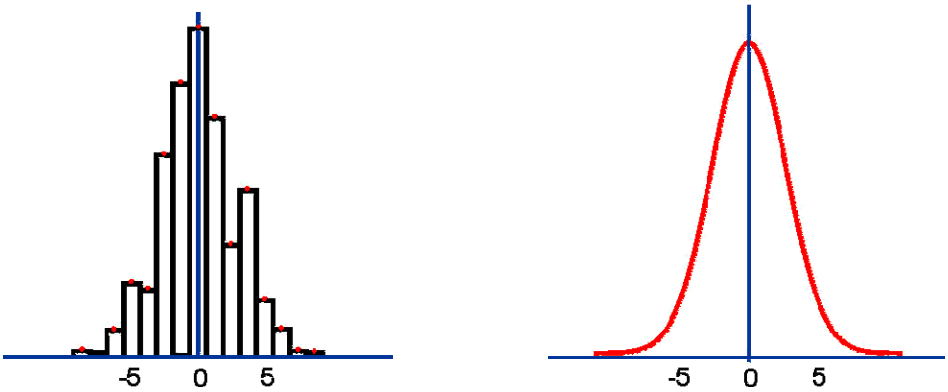
Παράδειγμα Εάν μετρήσουμε την ομική αντίσταση για δύο θερμοκρασίες, για $\theta=25^o$ C R=23.17 kOhm ενώ για $\theta=80^o$ C R=22.61 kOhm δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πώς μεταβάλλεται η R(θ), παρά μόνο εάν οι μετρούμενες τιμές συνοδεύονται από το σφάλμα τους δηλαδή για $\theta=25^o$ C R=23.17±0.04 kOhm ενώ για $\theta=80^o$ C R=22.61 ±0.04 kOhm (παρατηρείστε ότι δε θα φτάναμε σε συμπέρασμα εάν το σφάλμα αναγραφόταν ως για $\theta=25^o$ C R=23.17±0.6 kOhm και για $\theta=80^o$ C R=22.61 ±0.6 kOhm)

2. Είδη σφαλμάτων

Συστηματικά σφάλματα: πρόκειται για σφάλματα που σχετίζονται με την αξιοπιστία μιας μέτρησης και μπορεί να οφείλονται στην κακή βαθμονόμηση των οργάνων, στη λανθασμένη χρήση των οργάνων ή στην παράβλεψη ορισμένων φαινομένων ή σε εξωτερικά αίτια που μπορεί να αλλάξουν τα αποτελέσματα του πειράματος (υγρασία, πίεση, θερμοκρασία κ.λ.π). Τα συστηματικά σφάλματα τείνουν να μετατοπίσουν όλες τις μετρήσεις με συστηματικό τρόπο έτσι ώστε η μέση τιμή να είναι μετατοπισμένη προς μία διεύθυνση π.χ εάν ένας χάρακας είναι φθαρμένος, η μέτρηση κάθε μήκους θα έχει σταθερό συστηματικό σφάλμα που είναι ανεπηρέαστο από την επαναληψιμότητα της μέτρησης. Ο μόνος τρόπος να ποσοτικοποιήσω το σφάλμα δηλαδή να εκτιμήσω σωστά την τάξη μεγέθους του είναι να συγκρίνω το όργανο που χρησιμοποιώ με άλλο που θεωρείται πρότυπο. Σε ένα σωστό πείραμα τα μεγάλα συστηματικά σφάλματα περιορίζονται με σύγκριση των τιμών με διαφορετικές μεθόδους.

Τυχαία σφάλματα: πρόκειται για σφάλματα που σχετίζονται με την ακρίβεια μιας μέτρησης και δείχνουν τις διακυμάνσεις που έχουν οι μετρήσεις ενός επαναλαμβανόμενου πειράματος που γίνεται κάτω από τις ίδιες φαινομενικά συνθήκες και τα οποία οδηγούν στην κατανομή των αποτελεσμάτων γύρω από μία μέση τιμή. Μπορεί να οφείλονται στην έλλειψη ευαίσθητης απόκρισης του οργάνου ή στον παρατηρητή (σφάλματα ανάγνωσης), στον εξωτερικό «θόρυβο», ή σε στατιστικές διαδικασίες (όπως είναι η ρίψη ενός ζαριού). **Τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα και περιγράφονται με τη στατιστική θεωρία.**

Σύμφωνα με τη στατιστική θεωρία εάν ένα φαινόμενο είναι πράγματι τυχαίο τότε η οριακή κατανομή που θα προκύψει (μετά από άπειρες προσπάθειες) θα είναι μια κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss. Η κατανομή Gauss είναι ίσως η πιο κοινή κατανομή στη θεωρία των πιθανοτήτων δηλαδή εάν επαναλάβουμε ένα πείραμα (π.χ ρίχνοντας ένα βέλος να πετύχουμε το 0), το αποτέλεσμα που παίρνουμε για π.χ 100 προσπάθειες φαίνεται στο σχήμα 1 ενώ για άπειρες στο σχήμα 2 και περιγράφεται μαθηματικά από την καμπύλη



σχήμα (1) σχήμα (2)

ή από τη σχέση

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$

που εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα x όπου x_o είναι η πιο πιθανή τιμή και σ η τυπική απόκλιση (βλ. Παράρτημα, στοιχεία από τη θεωρία των πιθανοτήτων) που καθορίζει το εύρος της κατανομής. Αυτήν την κατανομή ακολουθούν τα τυχαία σφάλματα και γι αυτό με προσέγγιση της κατανομής των μετρήσεων με κατανομή Gauss, η τυπική απόκλιση αποτελεί τον τρόπο που εκφράζεται το **σφάλμα**.

Όλα τα σφάλματα που προσδιορίζουμε στο εργαστήριο ποσοτικά είναι πάντοτε τυχαία.

3. Μέση τιμή και σφάλμα

Επειδή σε πολλές περιπτώσεις, όταν μετρούμε πολλές φορές, στις ίδιες συνθήκες την ίδια ποσότητα βρίσκουμε διαφορετικά αποτελέσματα, βρίσκουμε τη **μέση τιμή** και το **απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής (ή τυπική απόκλιση της μέσης τιμής)**.
Εάν σε ένα πείραμα η μέτρηση του μεγέθους x επαναληφθεί N φορές, και οι μετρούμενες τιμές είναι $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$, τότε ως πραγματική θεωρούμε την μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}$$

Εάν τα σφάλματα των παραπάνω μετρήσεων είναι τυχαία θα διαφέρουν ως προς το πρόσημο και ως προς το μέγεθος. Έτσι στον υπολογισμό της μέσης τιμής κάποια από τα τυχαία σφάλματα αλληλοαναιρούνται στο άθροισμα. Η επανάληψη πολλών μετρήσεων είναι και ο καλύτερος τρόπος περιορισμού των τυχαίων σφαλμάτων. Επιπλέον μπορεί να υπολογιστεί η απόκλιση των μετρήσεων από τη μέση τιμή. Το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τη βεβαιότητα των N μετρήσεων μας για τη μέση τιμή του x δηλαδή γράφοντας $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$ όπου

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_k \left(x_k - \bar{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

Άρα συνολικά ο σωστός τρόπος αναγραφής της μετρούμενης τιμής είναι

Τιμή ± σφάλμα ± συστηματικό σφάλμα

Εάν υποθέσουμε ότι μετράμε το μήκος της ακμής ενός παραλληλεπιπέδου και βρίσκουμε

$\bar{L} \pm \delta\bar{L} = 9.6 \pm 0.3\text{cm}$ και ενός στύλου και βρίσκουμε $\bar{H} \pm \delta\bar{H} = 26681.5 \pm 0.3\text{cm}$ Μπορούμε να πούμε ποια μέτρηση είναι πιο ακριβής αν και οι δύο έχουν το ίδιο απόλυτο σφάλμα (0.3 cm); Γι αυτό ορίζουμε το **σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής** ως $\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$ που συνήθως αναφέρεται ως ποσοστό επί τοις εκατό δηλαδή $\sigma_{\sigma\chi}\% = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}} 100$

Στο παραπάνω παράδειγμα για το παραλληλεπίπεδο θα είναι

$$\frac{\delta\bar{L}}{\bar{L}} = \frac{0.3}{9.6} = 0.031 = 3.1\% \sim 3\%$$

Ενώ για το στύλο

$$\frac{\delta\bar{H}}{\bar{H}} = \frac{0.3}{26681.5} = 0.00011 = 0.011\% = 0.01\%$$

Άρα η μέτρηση του στύλου είναι ακριβέστερη.
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ το απόλυτο **σφάλμα της μέσης τιμής** έχει τις μονάδες του μετρούμενου μεγέθους, το σχετικό είναι αδιάσειστο μέγεθος. Μπορείτε να ανατρέξετε στο Παράρτημα για να μελετήσετε αναλυτικότερα τους τρόπους ορισμού των

σφαλμάτων των μετρούμενων τιμών ενός πειράματος και τη στατιστική σημασία τους για ένα δείγμα τιμών.

Παράδειγμα
Σε ένα πείραμα καταμέτρησης κοσμικών ακτίνων που προσπίπτουν σε έναν ανιχνευτή ανά ώρα, έγιναν εννέα μετρήσεις και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι

i	$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{(x_i - \bar{x})^2}$
1	80	400
2	95	25
3	100	0
4	110	100
5	90	100
6	115	225
7	85	225
8	120	400
9	105	25
Σ	900	1500

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{900}{9} = 100$$

και $\delta\bar{x} = \sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\dfrac{1500}{8}} = \sqrt{188} = 14$

Άρα τελικά ο αριθμός των κοσμικών ακτίνων που μετρήθηκαν είναι x =100±14 με σφάλμα 14/100 =14%

4. Σημαντικά ψηφία

Για την καταγραφή των πειραματικών δεδομένων και των υπολογιστικών αποτελεσμάτων θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο σωστός αριθμός των σημαντικών ψηφίων. Σημαντικά ψηφία ενός μετρούμενου ή υπολογιζόμενου μεγέθους είναι το πλήθος των ψηφίων της τα οποία είναι επαναλήψιμα κατά τη μετρητική διαδικασία. Συνήθως είναι τα ψηφία που γνωρίζουμε με ακρίβεια εκτός από τα μηδενικά που δείχνουν το δεκαδικό σημείο. Συνήθως το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός μετρούμενου μεγέθους ταυτίζεται με την ακρίβεια των οργάνων μέτρησης. Έτσι σε ένα χάρακα με χαραγές κάθε 1 cm και με μικρότερες υποδιαιρέσεις κάθε 0.1 cm η εκτίμησή μας (κατά 0.01 cm) αντιπροσωπεύει και το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της μέτρησης. **Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού μας δίνει ένα μέτρο της ακρίβειας ενός πειραματικού αποτελέσματος**.
Για την ορθή αναφορά των σημαντικών ψηφίων υπάρχουν οι εξής κανόνες:

- Ως πρώτο σημαντικό ψηφίο μετράμε το αριστερότερα μη μηδενικό.

- **Εάν υπάρχει υποδιαστολή** ως τελευταίο σημαντικό είναι αυτό που βρίσκεται δεξιότερα (ακόμα κι αν είναι μηδενικό) δηλαδή σημαντικά είναι όλα τα ψηφία ***από το πρώτο μη μηδενικό και μετά*** π.χ 0.000034 (2), 2.00 (3) 0.050 (2).
- **Εάν δεν υπάρχει υποδιαστολή** ως τελευταίο σημαντικό είναι το δεξιότερο μη μηδενικό δηλαδή σημαντικά είναι όλα τα ψηφία ***απο το πρώτο αριστερά μέχρι το τελευταίο μη μηδενικό*** 1 892 (4), 4023 (4), 400 (1), 15000 (2).

Όπως φαίνεται στο παράδειγμα στους ακέραιους αριθμούς τα μηδενικά μπορεί να είναι ή να μην είναι σημαντικά γι αυτό πρέπει να διευκρινίζονται π.χ 4.00 (3 σημαντικά ψηφία) 15000 (2 σημαντικά ψηφία) γράφοντας τον αριθμό σε εκθετική μορφή οπότε τότε όλα τα ψηφία που εμφανίζονται πριν από την δύναμη του 10 θεωρούνται σημαντικά δηλαδή 4×10^2 (1 σημαντικό ψηφίο) ή 1.00×10^6 ο αριθμός έχει μετρηθεί με ακρίβεια, που αντιστοιχεί σε (3 σημαντικά ψηφία) δηλαδή ο αριθμός έχει μετρηθεί με ακρίβεια, που αντιστοιχεί σε 3 σημαντικά ψηφία).

5. Σημαντικά ψηφία και αριθμητικές πράξεις

Το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων καθορίζεται από τον όρο που έχει τη μικρότερη ακρίβεια.

- Μετά την **πρόσθεση ή αφαίρεση** το πλήθος των **δεκαδικών** ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον αριθμό που έχει τον μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων π.χ 89.332+1.1=90.432 ~ 90.4
  Το 90.4 καθορίζεται από το γεγονός ότι το μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 1.1.
- Μετά **τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση** το πλήθος των **σημαντικών** ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον αριθμό με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων. π.χ.
  (2.80) x (4.5039) = 12.61092 ~ 12.6. Το 12.6 (3 σημαντικά) καθορίζεται από το γεγονός ότι τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 2.80 (3 σημαντικά)

6. Σημαντικά ψηφία, σφάλματα και στρογγυλοποιήσεις

Στην αναφορά των πειραματικών αποτελεσμάτων στο Εργαστήριο δηλαδή στην αναφορά της μέτρησης (ή της μέσης τιμής των μετρήσεων) και το πειραματικό σφάλμα της, χρησιμοποιούμε στρογγυλοποιημένες τιμές απορρίπτουμε δηλαδή τα ψηφία που δεν είναι σημαντικά ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες στρογγυλοποίησης

- **Αρχίζουμε την στρογγυλοποίηση από το σφάλμα**
- **Κατά τη στρογγυλοποίηση του σφάλματος κρατάμε ένα σημαντικό ψηφίο (εάν οι μετρήσεις είναι N<20) εκτός εάν αυτό είναι το 1 ή το 2 οπότε κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία.(ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΝΑ σημαντικό και ΟΧΙ ένα δεκαδικο!)**
- **Στρογγυλοποιούμε τη μέση τιμή κρατώντας τόσα δεκαδικά ψηφία όσα είναι και του σφάλματος. Δηλαδή η μέτρηση ή η μέση τιμή των μετρήσεων και του σφάλματος αναγράφονται με την ίδια ακρίβεια.**

Αναλυτικότερα κατά τη στρογγυλοποίηση του σφάλματος

- Βρίσκουμε το σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει
- Εξετάζουμε το αμέσως επόμενο
- Αν αυτό είναι >5 αυξάνουμε το σημαντικό κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα
- Αν αυτό είναι < 5 αφήνουμε το σημαντικό όπως είναι και παραλείπουμε τα υπόλοιπα
- Αν αυτό είναι = 5 εξετάζουμε τι υπάρχει μετά
    - o Αν υπάρχει έστω και 1 ψηφίο >0 αυξάνουμε το σημαντικό κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα
    - o Αν δεν υπάρχει ούτε 1 ψηφίο >0 κάνουμε ότι θέλουμε (είτε αυξάνουμε, είτε αφήνουμε όπως είναι).

Παραδείγματα

	$\delta\bar{x}$	$\delta\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \pm \delta\bar{x}$
43.0319 sec	**0.0429 sec**	**0.04 sec**	**43.03 sec**	**(43.03±0.04) sec**
0.017465 g	**0.000498 g**	**0.0005 g**	**0.0175 g**	**(0.0175±0.0005) g**
24.84888 m	**0.24976 m**	**0.25 m**	**24.85 m**	**(24.85±0.25) m**
2357.46 m/s	**58.432 m/s**	**60 m/s**	**2360 m/s**	**(2360±60) m/s**
4118572.3 sec	**2777.289 sec**	**2800 sec**	**4118600 sec**	**(4118600±2800) sec**
7 400 g	**0.00815 g**	**0.008 g**	**7400 g**	**(7400±0.008) g**

Καλό θα είναι να κρατάμε ένα ακόμα ψηφίο πέραν του σημαντικού στις τιμές που υπεισέρχονται στις αριθμητικές πράξεις για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα στρογγυλοποίησης.
Στις μαθηματικές ή φυσικές σταθερές ή γενικά στα μεγέθη που θεωρούνται γνωστά δεν αναφέρεται σφάλμα π.χ το π στον υπολογισμό του εμβαδού.

7. Διάδοση των σφαλμάτων

Εάν ένα μέγεθος z εξαρτάται από (μία ή) δύο μετρούμενες ποσότητες (x και y) ή και περισσότερες οι οποίες έχουν μέσες τιμές $\bar{x}, \bar{y}$ και ανεξάρτητα σφάλματα ($\delta\bar{x}, \delta\bar{y}$ αντίστοιχα) τότε υπολογίζουμε το σφάλμα του με τον κανόνα διάδοσης των σφαλμάτων

$$\delta\bar{z} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\bar{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta\bar{y}\right)^2}$$

Όπου $\frac{\partial}{\partial x}$ η μερική παράγωγος ως προς x. Αναλυτικότερα οι κανόνες υπολογισμού των σφαλμάτων περιλαμβάνονται στον παρακάτω πίνακα για μία σειρά απλών μαθηματικών σχέσεων.

Διάδοση σφαλμάτων

	Σχέση μεταξύ Ζ και (x,y)	Σχέση μεταξύ των σφαλμάτων Δz και $\delta\overline{x}, \delta\overline{y}$
1	z=x+y z=x-y	$\delta\overline{z}^2 = \delta\overline{x}^2 + \delta\overline{y}^2$
2	z=xy z=x/y	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right)^2 = \left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)^2 \pm \left(\frac{\delta\overline{y}}{\overline{y}}\right)^2$
3	$z=x^n$	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right) = n\left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)$
4	z=lnx	$\delta\overline{z} = \left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)^2$
5	$z=e^x$	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right) = \delta\overline{x}$
6	$z=\frac{x+y}{2}$	$\delta\overline{z} = \frac{1}{2}\sqrt{\delta\overline{x}^2 + \delta\overline{y}^2}$

Για την καταγραφή των μετρήσεων χρησιμοποιούμε ΠΑΝΤΑ πίνακες

Παράδειγμα

Υπολογισμός της επιτάχυνσης κατά την ευθύγραμμη, ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση από τη σχέση $\alpha=2s/t^2$. Έστω ότι μετράμε

s =12.0±0.10 m

t =35.20 ±0.5 s

Τότε $\delta\overline{a} = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial s}\delta\overline{s}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\delta\overline{t}\right)^2}$

$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{2}{\overline{t}^2} = \frac{2}{(35.2)^2}$ και $\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{4\overline{s}}{\overline{t}^3} = -\frac{4 \cdot 12}{(35.2)^3}$

Άρα κάνοντας τις πράξεις $\overline{a} = 0.488 ... \mathrm{m/s^2}$ και $\delta\overline{a} = 0.0407\,\mathrm{m/s^2}$

Οπότε $\boxed{a = 0.49 \pm 0.04\ \mathrm{m/s^2}}$

8. Τρόπος αναγραφής Αποτελεσμάτων

Ανακεφαλαιώνοντας θα πρέπει στην αναγραφή των πειραματικών αποτελεσμάτων να προσέχουμε τα εξής:

1. Μέση τιμή
2. Τα σφάλματά της (απόλυτο και σχετικό) με τη μορφή (± σφάλμα)

3. τις μονάδες μέτρησης (όπου υπάρχουν)
4. τον κανόνα του «σημαντικού ψηφίου
5. τον κανόνα της ίδιας ακρίβειας για τη μέση τιμή και το σφάλμα της

Αναφορά με το απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής

$\overline{x} \pm \delta\overline{x} = (83.5 \pm 0.2)\text{m/s}^2$

Αναφορά με το σχετικό σφάλμα μέσης τιμής

$\overline{x} \pm \sigma_{\sigma\chi}\% = 83.5\,\text{m/s}^2 \pm 0.2\%$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Στοιχεία από τη θεωρία των πιθανοτήτων

1. Είδη σφαλμάτων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κατανομή των μετρούμενων τιμών ενός πειράματος.

Μέγιστο σφάλμα

Προσδιορίζοντας τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μία ομάδας δεδομένων, x_{max} και x_{min} το μέγιστο σφάλμα ορίζεται ως η ποσότητα

$$\Delta x_{max} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Υποθετικά καμία τιμή δεν θα πρέπει να είναι έξω από

$\overline{x} \pm \Delta x_{\max}$

Πιθανό σφάλμα

Το πιθανό σφάλμα $\Delta x_{\pi\iota\theta}$ καθορίζει το διάστημα $\overline{x} \pm \Delta x_{\pi\iota\theta}$, το οποίο περιέχει το 50% των μετρούμενων τιμών.

Μέση Απόκλιση

Η μέση απόκλιση είναι η μέση τιμή των αποκλίσεων από τη μέση τιμή των μετρήσεων,

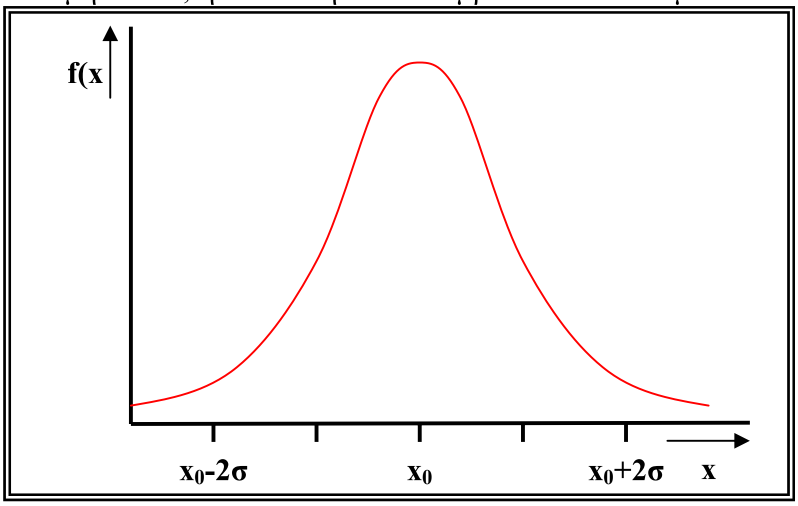
$$\Delta x_{\mu} = \frac{\sum_k \left| x_k - \overline{x} \right|}{N}$$

Αν οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss, περίπου το 58% θα βρίσκεται στο διάστημα $\overline{x} \pm \Delta x_{\mu}$

Τυπική απόκλιση

Εάν οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss, η πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα x είναι

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$



όπου x_o είναι η πιο πιθανή τιμή και σ η τυπική απόκλιση που καθορίζει το εύρος της κατανομής. Αυτήν την κατανομή ακολουθούν τα τυχαία σφάλματα και γι αυτό με προσέγγιση της κατανομής των μετρήσεων με κατανομή Gauss η τυπική απόκλιση αποτελεί τον τρόπο που εκφράζεται το **σφάλμα .**

2. Τυπική απόκλιση

Η μέση τιμή είναι η πιο πιθανή τιμή μίας κατανομής Gauss. Η τυπική απόκλιση τότε εκφράζεται σε σχέση με τη μέση τιμή ως

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_k \left(x_k - \bar{x}\right)}{N}}$$

Η ποσότητα σ^2, δηλαδή το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης, ονομάζεται ***διασπορά.*** Η πιο καλή εκτίμηση της αληθινής τυπικής απόκλισης είναι

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_k \left(x_k - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$$

Ο λόγος που διαιρούμε με Ν για την εκτίμηση της μέσης τιμής και με Ν-1 για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή είναι ο εξής: Για τον υπολογισμό της διασποράς δεν χρησιμοποιείται η αληθινή μέση τιμή του x αλλά η καλύτερη εκτίμησή της δηλαδή ο μέσος όρος των μετρήσεων. Έτσι η υπολογιζόμενη ποσότητα $\left(x_k - \bar{x}\right)^2$ είναι πάντα λίγο μικρότερη από την επιθυμητή $\left(x_k - \bar{x}_{\alpha\lambda\eta\theta}\right)^2$. Στη θεωρία των πιθανοτήτων (χρησιμοποιώντας δηλαδή την υπόθεση ότι οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss) αποδεικνύεται ότι αυτή η υποτίμηση διορθώνεται χρησιμοποιώντας Ν-1 αντί για Ν.

Εάν πραγματοποιηθεί άλλη μία μέτρηση του x τότε (ιδιότητα της κατανομής Gauss) αυτή θα είχε πιθανότητα περίπου 68% να βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x} \pm \sigma_\chi$.

Ποιά είναι η πιθανότητα η μέση τιμή που υπολογίσαμε και η οποία βασίζεται σε μικρό αριθμό μετρήσεων να βρίσκεται κοντά στην αληθινή μέση τιμή που βασίζεται σε ένα μεγάλο (άπειρο) αριθμό μετρήσεων; Η απάντηση βρίσκεται στην ακόλουθη διαπίστωση: Ανάμεσα στις μετρήσεις πολλών παρατηρητών που καταλήγουν σε διαφορετική μέση τιμή και διαφορετική τυπική απόκλιση, υπάρχει μία πιο στενή διασπορά των μέσων τιμών σε σχέση με τη διασπορά των μεμονωμένων μετρήσεων. Δηλαδή, η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών είναι μικρότερη από τις τυπικές αποκλίσεις των μεμονωμένων μετρήσεων. Αυτή η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών δίνει την πιθανότητα του παραπάνω ερωτήματος και υπολογίζεται από τη θεωρία ως:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_R \left(x_R - \bar{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

και ονομάζεται **τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής (ή απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής)**. Άρα ενδιαφερόμαστε για το σφάλμα της μέσης τιμής, το οποίο είναι μικρότερο από σ_x εάν υπήρχαν πολλές μετρήσεις π.χ εάν υπάρχουν 20 μετρήσεις, το σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι $\sqrt{20} = 4.47$ φορές μικρότερο από το σφάλμα κάθε μέτρησης.

Το σφάλμα της μέσης τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τη βεβαιότητα των N μετρήσεων μας για τη μέση τιμή του x δηλαδή γράφοντας $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ **όπου** $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$**. σημαίνει ότι εάν επαναληφθούν οι N μετρήσεις του x θα υπάρχει 68% πιθανότητα η καινούρια μέση τιμή** $\bar{x}$ **να βρίσκεται μέσα στο διάστημα** $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ **(δηλαδή μεταξύ** $\bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$ **και** $\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}$**).** Σημαίνει επίσης ότι υπάρχει 32% πιθανότητα να είναι έξω από αυτό το διάστημα. Δηλαδή στα 100 τέτοια πειράματα, κατά μέσο όρο τα 32 θα καταλήξουν σε μία τιμή έξω από τα τυπικά σφάλματα.
Για μια κατανομή Gauss υπάρχει περίπου 90% πιθανότητα η αληθινή τιμή να βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}}$ δηλαδή σε διάστημα διπλάσιο από το τυπικό σφάλμα και μόνο 0.3% να είναι έξω από το διάστημα $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$.

Παράδειγμα
Σε ένα πείραμα καταμέτρησης κοσμικών ακτίνων που προσπίπτουν σε έναν ανιχνευτή ανά ώρα , έγιναν εννέα μετρήσεις και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι

i	**x_i**	**$(x_i - \bar{x})^2$**
1	80	400
2	95	25
3	100	0
4	110	100
5	90	100
6	115	225
7	85	225
8	120	400
9	105	25
Σ	900	1500

$\bar{x}$ =900/9=100 και σ_x^2 =1500/8 =188 ή $\sigma_x = 14$.
Άρα η πιθανότητα να υπάρχει μία μέτρηση του x στο διάστημα 100 ± 14 είναι 68%. Η τιμή που προσδιορίζει αυτό το set μετρήσεων είναι $100 \pm 14/\sqrt{9}$ ή 100 ± 5. Εάν κάποιος κάνει άλλες εννέα μετρήσεις του x , η νέα μέση τιμή έχει 68% πιθανότητα να βρίσκεται στο διάστημα 100 ± 5.
Διαδικασίες τυχαίας καταμέτρησης όπως αυτό το παράδειγμα υπακούουν στην κατανομή Poisson για την οποία $\sigma_x = \sqrt{\bar{x}}$. ‘Άρα η αναμενόμενη τιμή του σ_x είναι 10. Αυτή είναι μικρότερη από την τιμή 14, γεγονός που δείχνει είτε ότι η διαδικασία δεν τελείως τυχαία ή –πιθανότερο- χρειάζονται και άλλες μετρήσεις.
Η ίδια ανάλυση σφάλματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε set επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είτε τα σφάλματα προέρχονται από τυχαίες διαδικασίες είτε όχι. Για παράδειγμα αν σε ένα πείραμα απαιτείται η μέτρηση του χρόνου t 5 φορές . Η μέση τιμή του χρόνου θα είναι

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t_i}{5} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}$$

και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι

$$\sigma\bar{t} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

όπου n=5

Ε-Π Χριστοπούλου, Μάρτιος 2005

Αναφορές

Taylor, J.R., An Introduction to Error Analysis (A series of Books in Physics, Commins, Eugene, D., Editor University Sciences Books, Mill Valley, California).

www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm