1^{η} ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Όχημα μάζας m ξεκινά από την αρχή του άξονα x χωρίς αρχική ταχύτητα και κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δυνάμεως $F = mk(1-e^{-t})$, όπου k θετική σταθερά. Στο όχημα ασκείται επίσης αντίσταση $R = mcu$, όπου u η ταχύτητα και c θετική σταθερά. Να ευρεθεί η ταχύτητα του οχήματος συναρτήσει του χρόνου.

Απάντηση: $u = \frac{k}{c} - \frac{k}{c-1}e^{-t} + \frac{k}{c(c-1)}e^{-ct}$.

Υπόδειξη: Για την λύση της ασκήσεως απαιτείται η γνώση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως υπό διανυσματική μορφή, $m\boldsymbol{\alpha} = \sum \mathbf{F}$, όπου το $\sum \mathbf{F}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σώμα. Σχεδιάστε τον άξονα Ox της κινήσεως και τοποθετήστε σε μια τυχαία θέση το σώμα. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Ακολούθως από την διανυσματική μορφή της εξισώσεως της κινήσεως μεταβείτε στην αλγεβρική μορφή , $m\ddot{x} = \sum F$. Το δεξιό μέλος είναι το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα. Επομένως πρέπει σε κάθε μία εξ αυτών να θέσετε και το κατάλληλο πρόσημο. Θυμηθείτε ότι για να ολοκληρώσετε την εξίσωση της κινήσεως πρέπει να την αναγάγετε σε διαφορική εξίσωση δύο μεταβλητών . Επομένως τροποποιείστε την εξίσωση επιλέγοντας την κατάλληλη έκφραση για την επιτάχυνση και για το δεξιό μέλος της εξίσωσης ούτως, ώστε να καταστεί δυνατή η ολοκλήρωση.

Λύση. Η εξίσωση της κινήσεως είναι $m\ddot{x} = mk(1-e^{-t}) - mcu$ (1). Αλλά $\ddot{x} = \frac{du}{dt}$. Επομένως $\frac{du}{dt} + cu = k(1-e^{-t})$ (1). Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι της μορφής $\frac{du}{dt} + P(t)u = Q(t)$ (2). Ο ολοκληρωτικός παράγοντας της (2) είναι ο $e^{\int P(t)dt}$ και η λύση είναι $ue^{\int P(t)dt} = \int \left[Q(t)e^{\int P(t)dt} \right] dt + C$.

Συνεπώς η λύση της (1) είναι η $ue^{ct} = \frac{k}{c}e^{ct} - \frac{k}{c-1}e^{(c-1)t} + C$ (3). Από την αρχική συνθήκη $u = 0$ όταν $t = 0$ η (3) δίδει $C = \frac{k}{c(c-1)}$. Επομένως $u = \frac{k}{c} - \frac{k}{c-1}e^{-t} + \frac{k}{c(c-1)}e^{-ct}$. Παρατηρούμε ότι όταν $t \to \infty$, η ταχύτητα $u \to \frac{k}{c}$.

Συζήτηση. Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε επίσης αν στην εξίσωση της κινήσεως (1) θέσουμε $\frac{du}{dt} = 0$, αν δηλαδή εξισώσουμε την κινούσα δύναμη $F = mk(1\text{-}e^{-t})$ με την αντίσταση $R = mcu$. Πράγματι: Αρχικά η F είναι μηδενική αλλά καθώς ο χρόνος αυξάνει η F αυξάνει εκθετικά και τείνει σε μια οριακή τιμή , η οποία ισούται με $F = mk$. Ο ρυθμός μεταβολής της F ισούται με $\frac{dF}{dt} = mke^{-t}$. Η αντίσταση R είναι επίσης μηδενική αρχικά και αυξάνει αυξανομένης της ταχύτητας και ο ρυθμός μεταβολής της ισούται με $\dfrac{dR}{dt} = mc\dfrac{du}{dt} = mck(1-e^{-t})$. Για $t=0$ είναι $\dfrac{dF}{dt} = mk$ και $\dfrac{dR}{dt} = 0$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της F είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της R. Η F αυξάνει ταχύτερα από την R, οπότε το όχημα επιταχύνεται, άρα αποκτά ταχύτητα. Κάποτε οι δύο δυνάμεις θα καταστούν ίσες . Από την στιγμή εκείνη και μετά το όχημα θα κινείται ισοταχώς, σύμφωνα με το αξίωμα της αδρανείας. Τούτο θα συμβεί όταν $t \to \infty$.

2. Υλικό σημείο μάζας m κινείται ευθυγράμμως εντός μέσου, το οποίο προβάλλει αντίσταση $au + bu^3$ στην κίνηση του σώματος, όπου u η ταχύτητα και a,b σταθερές. Αν αυτή είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα και αν τούτο έχει αρχική ταχύτητα u_0, να ευρεθεί το διάστημα που θα διανύσει ,έως ότου μηδενιστεί η ταχύτητά του. Ακολούθως να υπολογιστεί το χρονικό διάστημα εντός του οποίου η ταχύτητα ελαττώνεται από u_0 σε $u_0/2$.

Απάντηση: (α) $s = \dfrac{m}{\sqrt{ab}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}u_0\right)$, (β) $t = \dfrac{m}{2a} \ln \dfrac{4a + bu_0^2}{a + bu_0^2}$.

Υπόδειξη: Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως της οποίας το δεξιό μέλος είναι η έκφραση $F = -(a\dot{x} + b\dot{x}^3)$. Ακολούθως επιλέγουμε την κατάλληλη έκφραση της επιταχύνσεως , με την οποία θα καταστεί δυνατή η ολοκλήρωση. Η επιτάχυνση $\ddot{x}$ γράφεται υπό τις ακόλουθες μορφές: $\ddot{x} = \dfrac{du}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{x} = \dfrac{du}{dx}\dfrac{dx}{dt} = u\dfrac{du}{dx}$.

Λύση. Έστω ότι το σώμα κινείται πάνω στον άξονα Ox και εκκινεί από το σημείο O. Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως είναι $m\ddot{x}\mathbf{i} = \mathbf{R} \Rightarrow m\ddot{x} = -(a\dot{x} + b\dot{x}^3)$ (1). Γράφουμε $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $m\dfrac{d\dot{x}}{a + b\dot{x}^2} = -dx$ (2). Για να ολοκληρώσουμε την (2) θέτουμε $\dot{x}\sqrt{b} = w\sqrt{a}$, οπότε $d\dot{x} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}dw$ και η (2) γράφεται $\dfrac{m}{\sqrt{ab}}\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}u_0}^{0} \dfrac{dw}{1+w^2} = -\int_0^H dx$. Επομένως $H = \dfrac{m}{\sqrt{ab}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}u_0\right)$.Την διαφορική εξίσωση της κινήσεως μπορούμε να γράψουμε και ως εξής. $m\dfrac{d\dot{x}}{dt} = -(a\dot{x} + b\dot{x}^3)$, οπότε $m\dfrac{d\dot{x}}{a\dot{x} + b\dot{x}^3} = -dt$ και η παράσταση αυτή ολοκληρώνεται απ' ευθείας. Θέτουμε $\dot{x} = u$ και έχουμε $m\dfrac{du}{u(a + bu^2)} = -dt$ (2). Το κλάσμα $\dfrac{1}{u(a+bu^2)} = \dfrac{1}{au} - \dfrac{b}{a}\dfrac{u}{a + bu^2}$. Επομένως η (2) δίδει $\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{du}{u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{d(a + bu^2)}{a + bu^2}\right] = -\dfrac{1}{m}dt$. Ολοκληρώνουμε με όρια ολοκληρώσεως του u από u_0 σε $u_0/2$ και ευρίσκουμε $t = \dfrac{m}{2a} \ln \dfrac{4a + bu_0^2}{a + bu_0^2}$.

3. Βλήμα μάζας m εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα άνω με αρχική ταχύτητα u_0. Ο αέρας επιφέρει επιβράδυνση ίση με mku, όπου u η ταχύτητα του βλήματος και $k>0$. Εάν το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος του h σε χρονικό διάστημα T, να αποδειχθεί ότι $u_0=kh+gT$.

Λύση. Θεωρούμε ότι η κίνηση εκτελείται πάνω στον άξονα Oz και επιλέγουμε ως θετική φορά του άξονα την φορά προς τα άνω. Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως είναι $m\ddot{z}=-mg-mk\dot{z}\Rightarrow$

$$\ddot{z}=-g-k\dot{z}\Rightarrow \ddot{z}+k\dot{z}=-g\Rightarrow \frac{du}{dt}=-(ku+g)\Rightarrow \frac{du}{ku+g}=-dt\Rightarrow \frac{d(ku+g)}{k(ku+g)}=-dt\Rightarrow \ln(ku+g)=-kt+c.$$

Επομένως $ku+g=ce^{-kt}$. Έχουμε όμως, $t=0$: $z=0$, $u=u_0$. Άρα $ku_0+g=c$. Άρα $ku+g=(ku_0+g)e^{-kt}$ (1).

Όταν $u=0$ τότε $t=T$. Άρα $g=(ku_0+g)e^{-kT}\Rightarrow e^{kT}=\dfrac{ku_0+g}{g}$. Ακολούθως θέτουμε στην (1) $u=\dfrac{dz}{dt}$ οπότε γίνεται $k\dfrac{dz}{dt}+g=(ku_0+g)e^{-kt}\Rightarrow kz+gt=-\dfrac{(ku_0+g)}{k}e^{-kt}+c$. Αλλά για $t=0$ έχουμε $z=0$. Επομένως $0=-\dfrac{ku_0+g}{k}+c\Rightarrow c=\dfrac{ku_0+g}{k}$. Άρα $kz+gt=-\dfrac{ku_0+g}{k}e^{-kt}+\dfrac{ku_0+g}{k}$. Όταν $t=T$, $z=h$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίδει $kh+gT=-\dfrac{ku_0+g}{k}e^{-kT}+\dfrac{ku_0+g}{k}$. Αλλά $e^{-kT}=\dfrac{g}{ku_0+g}$. Με αντικατάσταση προκύπτει $kh+gT=u_0$.

Άλλος τρόπος. $\ddot{z}=-g-k\dot{z}\Rightarrow \ddot{z}+k\dot{z}=-g\Rightarrow \dfrac{du}{dt}=-(k\dfrac{dz}{dt}+g)\Rightarrow du=-kdz-gdt$. Με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$\int_u^0 du=-k\int_0^h dz-g\int_0^T dt$$

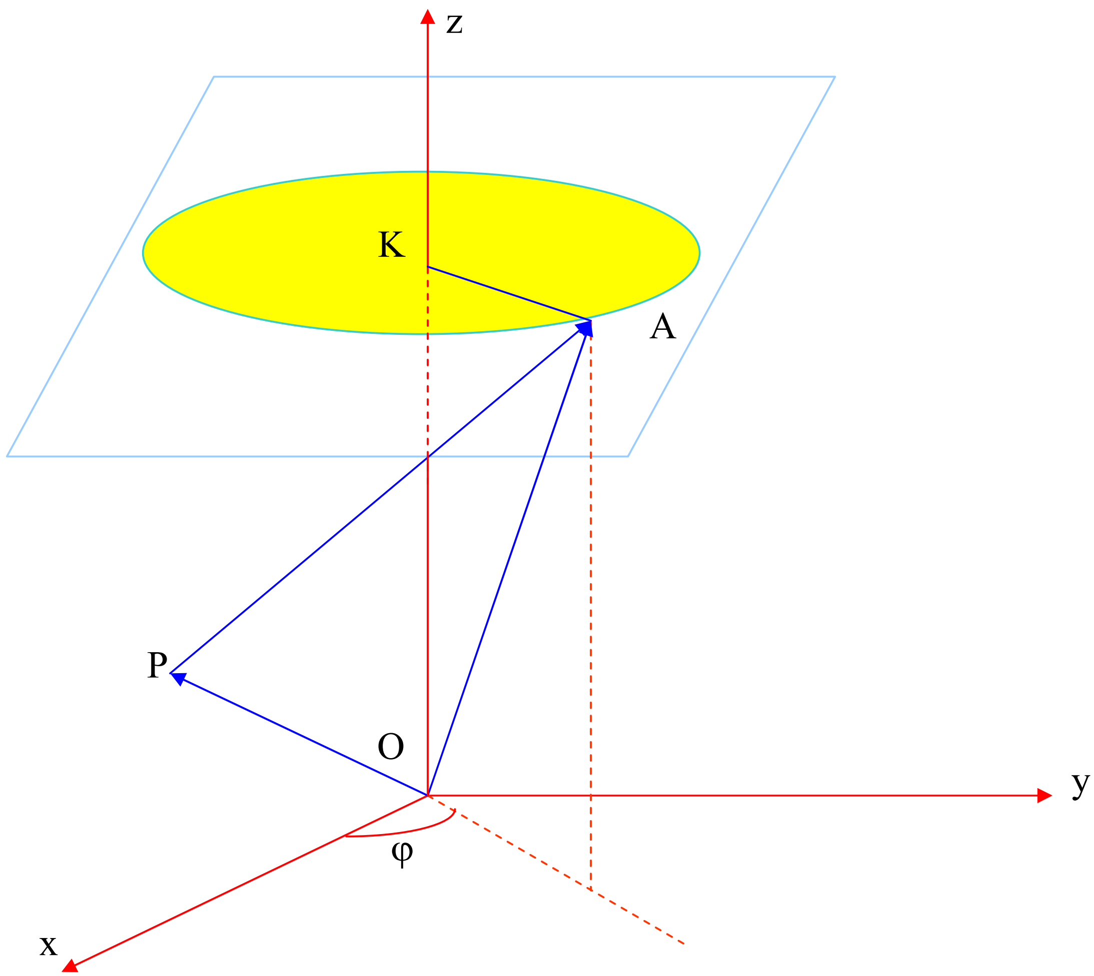
. Από αυτήν προκύπτει $kh+gT=u_0$.

4. Υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα V σε οριζόντιο κύκλο (K,α), το κέντρο K του οποίου έχει συντεταγμένες (0,0,h). Να προσδιοριστεί η θέση του υλικού σημείου ως προς παρατηρητή ευρισκόμενο στην αρχή O(0,0,0). Εξαρτάται η ταχύτητα του υλικού σημείου από την θέση του παρατηρητή;

Απάντηση: (α) $\dot{\mathbf{r}}=V\left(-\mathbf{i}\sin\dfrac{Vt}{\alpha}+\mathbf{j}\cos\dfrac{Vt}{\alpha}\right)$, (β) Η ταχύτητα του υλικού σημείου δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Υπόδειξη: Σχεδιάζουμε τρισορθογώνιο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxyz$ με το επίπεδο της κινήσεως του σώματος κάθετο στον άξονα Oz. Έστω K το σημείο τομής του επιπέδου κινήσεως με τον άξονα Oz. Σχεδιάζουμε τον κύκλο (K,α), τον οποίο γράφει το σώμα. Φέρουμε το διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου $\mathbf{OA}=\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και ορίζουμε τις προβολές του διανύσματος θέσεως ως προς τους άξονες. Εκφράζουμε τα x,y συναρτήσει της γωνίας, κατά την οποία έχει στραφεί η επιβατική ακτίνα KA ως προς τον σταθερό άξονα Ox. Οι εκφράσεις για τα x,y περιέχουν τον χρόνο κινήσεως. Ακολούθως παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο.

Λύση. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ με τον άξονα Oz κατακόρυφο. Έστω $A(x,y,z)$ η θέση του υλικού σημείου κατά την στιγμή t. Το διάνυσμα **KA** σχηματίζει εκείνη τη στιγμή γωνία φ με τον σταθερό άξονα Ox, όπου $\varphi=\omega t$ και $\omega=\dfrac{V}{\alpha}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς τον άξονα Oz. Επομένως $\varphi=\dfrac{Vt}{\alpha}$. Οι συντεταγμένες του υλικού σημείου είναι $x=\alpha\cos\varphi$, $y=\alpha\sin\varphi$ και $z=h$. Συνεπώς το διάνυσμα θέσεως $\mathbf{r}=\mathbf{OA}$ του υλικού σημείου ως προς την αρχή O του συστήματος είναι $\mathbf{r}=\mathbf{i}\alpha\cos\dfrac{Vt}{\alpha}+\mathbf{j}\alpha\sin\dfrac{Vt}{\alpha}+h\mathbf{k}$. Η ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς την αρχή O του συστήματος δίδεται από την σχέση $\dot{\mathbf{r}} = V\left(-\mathbf{i}\,sin\frac{Vt}{\alpha} + \mathbf{j}\,cos\frac{Vt}{\alpha}\right)$. Για παρατηρητή ευρισκόμενο στην θέση K το διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου είναι $\mathbf{r}_1 = \mathbf{KA} = \mathbf{i}\alpha\,cos\frac{Vt}{\alpha} + \mathbf{j}\alpha\,sin\frac{Vt}{\alpha}$ η δε ταχύτητα του υλικού σημείου ισούται με $\dot{\mathbf{r}}_1 = V\left(-\mathbf{i}\,sin\frac{Vt}{\alpha} + \mathbf{j}\,cos\frac{Vt}{\alpha}\right) = \dot{\mathbf{r}}$. Ας θεωρήσουμε ακολούθως παρατηρητή ευρισκόμενο σε τυχόν σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$. Το διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου A ως προς το P είναι $\mathbf{PA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OP}$ και αν τεθεί $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OP}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{PA}$, έχουμε $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Παραγωγίζουμε την σχέση αυτή ως προς τον χρόνο και ευρίσκουμε $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0 \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}$. Επομένως η ταχύτητα του υλικού σημείου δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.



5. Το διάνυσμα θέσεως υλικού σημείου ως προς παρατηρητή ευρισκόμενο στην αρχή O(0,0,0) ακίνητου συστήματος αναφοράς ισούται με $\mathbf{r} = \mathbf{i}\alpha\,cos\,\omega t\,sin\,\Omega t + \mathbf{j}\alpha\,sin\,\omega t\,sin\,\Omega t + \mathbf{k}\alpha\,cos\,\Omega t$, όπου α, ω, Ω σταθερές. Να αποδειχθεί ότι το υλικό σημείο κινείται επί επιφανείας σφαίρας η δε ταχύτητα αυτού ισούται με $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2\,sin^2\,\Omega t)^{1/2}$. Να ευρεθούν οι θέσεις στις οποίες η ταχύτητα εμφανίζει ακρότατο.

Απάντηση: (α) Η κίνηση εκτελείται σε επιφάνεια σφαίρας , (β) $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2 \sin^2 \Omega t)^{1/2}$, (γ) Ελάχιστο στις θέσεις $\Omega t = 0$ και $\Omega t = \pi$ με $u = \alpha\Omega$, μέγιστο στη θέση $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ με $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2)^{1/2}$.

Υπόδειξη: Υπολογίζουμε την τιμή του r^2. Η ταχύτητα ευρίσκεται με την παραγώγιση του $\mathbf{r}$ ως προς τον χρόνο. Ακολούθως προσδιορίζονται οι θέσεις στις οποίες η ταχύτητα εμφανίζει ακρότατο.

Λύση. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ με τον άξονα Oz κατακόρυφο. Έστω $A(x, y, z)$ η θέση του υλικού σημείου κατά την στιγμή t. Το διάνυσμα $\mathbf{OA} = \mathbf{r}$ έχει $x = \alpha \cos\omega t \sin\Omega t$, $y = \alpha \sin\omega t \sin\Omega t$ και $z = \alpha\cos\Omega t$. Παρατηρούμε ότι $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$. Επομένως το υλικό σημείο κινείται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (O, α). Η ταχύτητα του υλικού σημείου θα προκύψει από την παραγώγιση του διανύσματος θέσεως ως προς τον χρόνο. Έχουμε $\dot{x} = \alpha(-\omega \sin\omega t \sin\Omega t + \Omega\cos\omega t\cos\Omega t)$, $\dot{y} = \alpha(\omega\cos\omega t \sin\Omega t + \Omega \sin\omega t\cos\Omega t)$ και $\dot{z} = -\alpha\Omega \sin\Omega t$. Η ταχύτητα είναι $\mathbf{u} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ και το μέτρο της ισούται με $u = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$. Συνεπώς $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2 \sin^2 \Omega t)^{1/2}$. Για τον προσδιορισμό των θέσεων όπου η ταχύτητα έχει μέγιστο ή ελάχιστο θέτουμε στην προηγουμένη σχέση $\Omega t = \theta$, οπότε έχουμε $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$ (1) . Παρατηρούμε ότι η τιμή της ταχύτητας είναι συνάρτηση της γωνίας θ. Παραγωγίζουμε την (1) ως προς θ και ευρίσκουμε $\frac{du}{d\theta} = \frac{\alpha^2\omega^2 \sin 2\theta}{2u}$ (2). Το ακρότατο ευρίσκεται αν θέσουμε $\frac{du}{d\theta} = 0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει $\sin 2\theta = 0$. Οι ρίζες της εξισώσεως αυτής είναι $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ και $\theta_3 = \pi$. Για να αποφανθούμε για το είδος του ακροτάτου, θα υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο της ταχύτητας στις θέσεις στις οποίες μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Έχουμε επομένως $\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{4\cos 2\theta(\Omega^2 + \omega^2 \sin\theta) - \omega^2 \sin^2 2\theta}{4\alpha(\Omega^2 + \omega^2 \sin^2\theta)^{3/2}}$. Για $\theta_1 = 0$ είναι $\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{\alpha} > 0$. Επομένως στην θέση $\theta_1 = 0$ η ταχύτητα παρουσιάζει ελάχιστο. Για $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ είναι $\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{\alpha} < 0$. Επομένως στην θέση $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ η ταχύτητα παρουσιάζει μέγιστο. Τέλος για $\theta_3 = \pi$ είναι $\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{\alpha} > 0$. Επομένως στην θέση $\theta_3 = \pi$ η ταχύτητα έχει ελάχιστο. Η μέγιστη ταχύτητα είναι $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2)^{1/2}$ είναι και η ελάχιστη $u = \alpha\Omega$.

6. Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της σπείρας $r = \alpha e^{b\theta}$, όπου r, θ πολικές συντεταγμένες, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να ευρεθεί η ακτινική και η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Λύση. Θέτουμε $\theta = \omega t$, οπότε $r = \alpha e^{b\omega t}$. Οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι $u_r = \dot{r} = \omega\alpha b e^{b\omega t}$ και $u_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow u_\theta = \alpha\omega e^{b\omega t}$. Οι συνιστώσες της επιταχύνσεως είναι $\alpha_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ και $\alpha_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$. Αλλά $\ddot{r} = \omega^2\alpha b^2 e^{b\omega t}$. Συνεπώς $\alpha_r = (b^2 - 1)\omega^2\alpha e^{b\omega t}$ και $\alpha_\theta = 2\alpha b\omega^2 e^{b\omega t}$.

7. Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος καμπύλης και το διάνυσμα θέσεως αυτού είναι $\mathbf{r} = t^3\, \mathbf{\imath} + t^2\, \mathbf{j}$, όπου t ο χρόνος. Να ευρεθούν τα μέτρα της επιτροχίου και κεντρομόλου επιταχύνσεως όταν t=2.

Απάντηση: Επιτρόχιος $\frac{du}{dt} = \frac{38}{\sqrt{10}}$, κεντρομόλος. $\frac{u^2}{R} = \frac{2888}{3}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το σύμφυτο σύστημα αξόνων. Υπολογίστε την ταχύτητα $\mathbf{u}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ και το μέτρο της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου. Ακολούθως προσδιορίστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\mathbf{T}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dr}=\dfrac{\mathbf{u}}{u}$ ως συνάρτηση του t. Κατόπιν από την σχέση $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{du}{dt}\mathbf{T}+\dfrac{u^2}{R}\mathbf{N}$ προσδιορίστε τις ζητούμενες συνιστώσες της επιταχύνσεως.

Λύση. Ως γνωστόν $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{du}{dt}\mathbf{T}+\dfrac{u^2}{R}\mathbf{N}$, όπου $\dfrac{du}{dt}$ είναι η επιτρόχιος συνιστώσα και $\dfrac{u^2}{R}$ είναι η κεντρομόλος . Επίσης από την σχέση $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ και την $\mathbf{u}=u\mathbf{T}$ προκύπτει $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{du}{dt}\mathbf{T}+u\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}$. Συνεπώς η ακτίνα καμπυλότητας R ευρίσκεται από την εξίσωση $\dfrac{u^2}{R}\mathbf{N}=u\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}$,δηλαδή $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{u}\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$ (1). Αρκεί λοιπόν να υπολογισθεί κατ' αρχάς η ταχύτητα και η $\mathbf{T}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dr}$ ως συνάρτηση του t. Είναι $d\mathbf{r}=\left[3t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j}\right]dt$ και $dr=\sqrt{\left(3t^2\right)^2+\left(2t\right)^2}dt$. Αλλά $u=\dfrac{dr}{dt}$. Επομένως $u=\sqrt{9t^4+4t^2}$. Από αυτήν έχουμε $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{18t^2+4}{\sqrt{9t^2+4}}$ (2). Για t=2 η (2) δίδει $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{45}{\sqrt{10}}$. Επίσης από τον ορισμό $\mathbf{T}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dr}$, ευρίσκουμε $\mathbf{T}=\dfrac{3t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j}}{\sqrt{(3t^2)^2+(2t)^2}}=\dfrac{3t\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{\sqrt{9t^2+4}}$ (3). Από την (3) ευρίσκουμε το $\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}=\dfrac{12\mathbf{i}-18t\mathbf{j}}{(9t^2+4)\sqrt{9t^2+4}}$ και ακολούθως το $\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\dfrac{6}{9t^2+4}$, οπότε από την (1) υπολογίζεται πλέον για t=2 η ακτίνα καμπυλότητας $R=\dfrac{3}{20}$. Κατά συνέπεια η κεντρομόλος συνιστώσα της επιταχύνσεως ισούται με $\dfrac{u^2}{R}=\dfrac{(4\sqrt{10})^2}{3/20}=\dfrac{4800}{3}$.

Σημείωση: Από την σχέση $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=1\Rightarrow 2\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}=0$ συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{T}$ και $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Το διάνυσμα $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ συμβολίζουμε με $\kappa\mathbf{N}$, όπου κ αριθμός με διαστάσεις αντιστρόφου μήκους καλούμενος καμπυλότητα και **N** μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο **T** και έχον φορά προς τα κοίλα της καμπύλης. Το επίπεδο των διανυσμάτων **T** και **N** καλείται εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο P. Η καμπυλότητα και η ακτίνα καμπυλότητας R είναι σε κάθε σημείο της καμπύλης αντίστροφοι αριθμοί, δηλαδή $\kappa R=1$. Συνεπώς $\kappa=\dfrac{1}{R}=\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$. Αλλά $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}=\dfrac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}$. Άρα $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{u}\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$.

$2^{η}$ ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να ευρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ επί ενός υλικού σημείου, το οποίο κινείται από το σημείο Α(0,α) στο σημείο Β(α,0) α) κατά μήκος της ευθείας $x + y = \alpha$, β) κατά μήκος του κύκλου $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$.

Υπόδειξη: Γράψτε τον τύπο του στοιχειώδους έργου της δυνάμεως $\mathbf{F}$ για διαδρομή $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ και ολοκληρώστε κατά μήκος της διαδρομής C, την οποία δίδει το πρόβλημα. Αν η διαδρομή C είναι της μορφής $f(x, y) = 0$, τότε εκφράζουμε το y συναρτήσει του x (ή αντίστροφα) ούτως ώστε στο ολοκλήρωμα να έχουμε μία μεταβλητή .

Απάντηση: (α) $W = \dfrac{\alpha^3}{6}$, (β) $W = \alpha^3\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}\right)$.

Λύση. Α) Το έργο της δυνάμεως υπολογίζεται από την σχέση $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ και C είναι ο δρόμος $x + y = \alpha$ κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$. Επομένως $W = \int_C (\alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy) = \int_C \alpha y dx + \int_C x^2 dy$. Στο πρώτο ολοκλήρωμα $\int_C \alpha y dx$ η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα (0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το y με το ίσο του $y = \alpha - x$ οπότε έχουμε $I_1 = \int_0^{\alpha} \alpha(\alpha - x)dx = \dfrac{\alpha^3}{2}$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_C x^2 dy$ η ολοκλήρωση τελείται ως προς y, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα (α,0). Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το x^2 με το ίσο του $x^2 = (\alpha - y)^2$ και το ολοκλήρωμα γίνεται $I_2 = \int_{\alpha}^{0} (\alpha - y)^2 dy = -\dfrac{\alpha^3}{3}$. Τελικά λαμβάνουμε $W = I_1 + I_2 = \dfrac{\alpha^3}{6}$.

Β) Το έργο της δυνάμεως υπολογίζεται από την σχέση $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ και C είναι ο δρόμος $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$. Επομένως $W = \int_C (\alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy) = \int_C \alpha y dx + \int_C x^2 dy$. Παρατηρούμε ότι η διαδρομή είναι το τεταρτοκύκλιο $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$. Στο πρώτο ολοκλήρωμα $\int_C \alpha y dx$ η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα (0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το y με το ίσο του $y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ και έχουμε πλέον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^{\alpha} \alpha\sqrt{\alpha^2 - x^2}dx$. Θέτουμε $x = \alpha\cos\theta$. Τα όρια του θ είναι $\pi/2$ και μηδέν. Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται $I_1 = \int_{\pi/2}^{0} \alpha\alpha\sin\theta(-\alpha\sin\theta d\theta) = -\int_{\pi/2}^{0} \alpha^3\sin^2\theta d\theta$. Αλλά $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$. Επομένως $I_1 = -\int_{\pi/2}^{0} \alpha^3 \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \dfrac{\alpha^3\pi}{4}$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα $\int_C x^2 dy$ η ολοκλήρωση τελείται ως προς y, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα $(\alpha, 0)$. Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το x^2 με το ίσο του $x^2 = \alpha^2 - y^2$ και έχουμε $I_2 = \int_{\alpha}^{0} (\alpha^2 - y^2)dy = -\frac{2\alpha^3}{3}$. Άρα $W = \alpha^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

2. Η δύναμη $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ κινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ΟΑΒΟ η οποία ορίζεται από τις γραμμές $y - 2x = -1$, $y = x^2$ και x=0. Να ευρεθεί το έργο της. Τι συμπεραίνετε για την δύναμη; Είναι συντηρητική;

Απάντηση: (α) $W = 0$. (β) Όχι, δεν το συμπεραίνουμε. Πρέπει προηγουμένως να εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Παρατηρούμε ότι τούτο είναι αληθές, επομένως τώρα συμπεραίνουμε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

Υπόδειξη: Γράψτε τον τύπο του στοιχειώδους έργου της δυνάμεως $\mathbf{F}$ για διαδρομή $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ και ολοκληρώστε κατά μήκος της διαδρομής C, την οποία δίδει το πρόβλημα. Η διαδρομή αποτελείται από διάφορα τμήματα , επομένως η ολοκλήρωση θα γίνει για καθένα τμήμα χωριστά .

Λύση. Εύκολα ευρίσκουμε ότι $\nabla \times \mathbf{F} = 0$,επομένως η δύναμη είναι διατηρητική. Το έργο της είναι μηδενικό, διότι η διαδρομή είναι κλειστή. Φυσικά μπορούμε να εργαστούμε και με τον ακόλουθο γενικό τρόπο. Το στοιχειώδες έργο της δυνάμεως δίνεται από τη σχέση $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2xdx + 3ydy$. (1) Επίσης $W = W_{OA} + W_{AB} + W_{BO}$,όπου O(0,0), A(0,-1), B(1,1), δηλαδή A είναι το σημείο τομής της ευθείας $y - 2x = -1$ και του άξονα y και B είναι το σημείο τομής της ευθείας $y - 2x = -1$ και της παραβολής $y = x^2$. Επομένως το τμήμα ΟΑ ευρίσκεται επί του άξονα y, το τμήμα ΑΒ ευρίσκεται επί ευθείας $y - 2x = -1$ και τέλος το τμήμα ΒΟ ευρίσκεται επί της παραβολής $y = x^2$. Κατά μήκος της γραμμής ΟΑ ισχύει $x = 0, dx = 0,$ το δε y μεταβάλλεται από $y = 0$ έως $y = -1$. Άρα ολοκληρώνοντας την (1) ευρίσκουμε $W_{OA} = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^{-1} = \frac{3}{2}$. Κατά μήκος της γραμμής ΑΒ ισχύει $y = 2x - 1, dy = 2dx$. Άρα στην σχέση(1) θα αντικαταστήσουμε τα y και dy με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους και η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς x με όρια $x = 0$ και $x = 1$. Συνεπώς $W_{AB} = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 3(2x - 1)2dx = 1$. Τέλος κατά μήκος της γραμμής ΒΟ ισχύει $y = x^2, dy = 2xdx$. Άρα στην σχέση (1) θα αντικαταστήσουμε τα y και dy με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους και η ολοκλήρωση θα γίνει ως προς x με όρια $x = 1$ και $x = 0$. Συνεπώς $W_{AB} = \int_1^0 2xdx + \int_1^0 3x^2 2xdx = -\frac{5}{2}$. Άρα $W_{\text{ολικό}} = 0$.

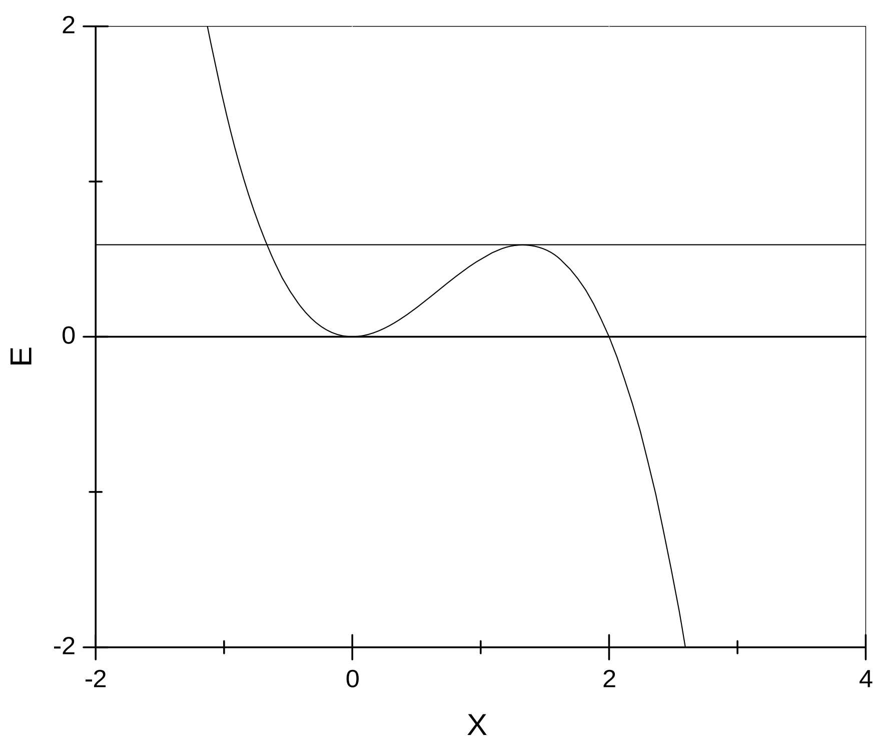
3. Υλικό σημείο κινείται στον άξονα Οx και η δυναμική του ενέργεια δίδεται από την σχέση $U = \frac{1}{2}(2x^2 - x^3)$, όπου x είναι απόσταση του υλικού σημείου από την αρχή Ο. Να ευρεθεί η θέση και το είδος της ισορροπίας αυτού. Αν η ενέργεια του υλικού σημείου ισούται με $E = \frac{16}{27}$, να ευρεθούν οι επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως και να μελετηθεί το είδος της κινήσεως εις εκάστη εξ αυτών , αναλόγως προς τις αρχικές συνθήκες.

Απάντηση: (α) $x = 0$, ευσταθής ισορροπία, $x = \frac{4}{3}$, ασταθής ισορροπία.

(β) Η κίνηση είναι επιτρεπτή στην περιοχή, όπου $E - U \geq 0$. Αυτή είναι η περιοχή $x \geq -\frac{2}{3}$.

Υπόδειξη: Σε προβλήματα αυτής της μορφής δίδεται ή η δύναμη ως $F = F(x)$ ή το δυναμικό $U = U(x)$. Σχεδιάζουμε την συνάρτηση $U = U(x)$ και φέρουμε την ευθεία γραμμή $E = σταθερό$, όπου E είναι η μηχανική ενέργεια του συστήματος . Την μηχανική ενέργεια είτε γνωρίζουμε από τα δεδομένα του προβλήματος είτε την υπολογίζουμε. Για να υπάρχουν επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως, πρέπει η ευθεία E να τέμνει την καμπύλη $U = U(x)$. Οι επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως είναι εκείνες στις οποίες ισχύει $E \geq U(x)$. Τα σημεία τομής της E με την $U = U(x)$ είναι σημεία στα οποία η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται. Αν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι τέτοιες, ώστε το σώμα να ευρίσκεται σε επιτρεπτή περιοχή κινήσεως, τότε η κίνηση του σώματος είναι περατωμένη, δηλαδή έχει όρια. Τα όρια της κινήσεως είναι τα σημεία τομής της E με την $U = U(x)$.

Λύση. Έχουμε $\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\left(4x - 3x^2\right)$ και $\frac{d^2U}{dx^2} = 2 - 3x$. Για να προσδιορίσουμε τα σημεία και το είδος της ισορροπίας θέτουμε $\frac{dU}{dx} = 0$, οπότε βρίσκουμε $x = 0$ και $x = \frac{4}{3}$. Η ρίζα $x = 0$ δίδει $\frac{d^2U}{dx^2} = \alpha > 0$. Άρα στο $x = 0$ η δυναμική συνάρτηση έχει ελάχιστο. Το σημείο αυτό είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Για $x = \frac{4}{3}$ η δεύτερη παράγωγος γίνεται $\frac{d^2U}{dx^2} = -2 < 0$. Άρα στο σημείο $x = \frac{4}{3}$ η δυναμική συνάρτηση έχει μέγιστο. Το σημείο αυτό είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας.



Για να βρούμε τις επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως , θέτουμε $E = U$, όπου $E = \frac{16}{27}$. Η εξίσωση $E = U$ έχει ρίζες $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$. Η κίνηση είναι επιτρεπτή στην περιοχή, όπου $E - U \geq 0$. Αυτή είναι η περιοχή $x \geq -\frac{2}{3}$. Στην περιοχή $x < -\frac{2}{3}$ η κίνηση δεν επιτρέπεται, διότι σε κάθε σημείο της περιοχής αυτής η κινητική ενέργεια είναι αρνητική. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α) Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο διάστημα $x_1 < x < x_2$, το σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων. Η ταλάντωση δεν είναι αρμονική, εκτός εάν γίνεται με μικρό πλάτος περί την περιοχή $x = 0$.

Β) Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο $x_1 = -\frac{2}{3}$, η δύναμη που του ασκείται εκεί είναι $F = 2$, οπότε το σώμα κινείται προς το σημείο $x_2 = \frac{4}{3}$. Όταν φθάσει στο σημείο αυτό, θα παραμείνει ακίνητο διότι εκεί η δύναμη είναι μηδενική.

Γ) Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο $x_2 = \frac{4}{3}$, θα παραμείνει ακίνητο διότι εκεί η δύναμη είναι μηδενική.

Δ) Αν για $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο διάστημα $x > x_2$, η κίνησή του θα εξαρτηθεί από την φορά της αρχικής του ταχύτητας. Αν η αρχική ταχύτητα είναι θετική , το σώμα θα απομακρυνθεί από την αρχική του θέση και θα κινηθεί προς το άπειρο με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα. Αν η αρχική ταχύτητα είναι αρνητική , το σώμα θα κινηθεί προς την θέση x_2, όπου και θα παραμείνει.

4. Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα Ox υπό την επίδραση των δυνάμεων $F_1 = -kx$ και $F_2 = \lambda t$. Τι κίνηση εκτελεί; Ποια είναι η έκφραση της απομακρύνσεως συναρτήσει του χρόνου; Θα άλλαζε το είδος της κινήσεως αν $F_1 = kx$ και $F_2 = \lambda t$;

Απάντηση: (α) Το σώμα μετατοπίζεται ισοταχώς με ταχύτητα $\frac{b}{\omega^2}$ κατά μήκος του άξονα Ox και ταυτόχρονα εκτελεί αρμονική ταλάντωση γύρω από την στιγμιαία θέση του με πλάτος $G = \left(x_0^2 + \frac{b^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x = G\,cos(\omega t + \varphi) + \frac{b}{\omega^2}t$, $b = \frac{\lambda}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, (β) $x = Ce^{-\omega t} + De^{\omega t} - \frac{b}{\omega^2}t$. .

Υπόδειξη: Γράφουμε την διαφορική εξίσωση της κινήσεως. Η γενική λύση είναι ίση με το άθροισμα της μερικής λύσεως x_p και της λύσεως x_c της ομογενούς, δηλαδή $x = x_c + x_p$. Ως μερική λύση αναζητούμε λύση της μορφής $x_p = At + B$.

Λύση. Η εξίσωση της κινήσεως είναι $m\ddot{x}\mathbf{i} = -kx\mathbf{i} + \lambda t\mathbf{i} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = bt$ (1), όπου $\omega^2 = \frac{k}{m}$ και $b = \frac{\lambda}{m}$. Η λύση της (1) είναι το άθροισμα των λύσεων της μερικής και της ομογενούς. Ως μερική λύση δοκιμάζουμε την $x_p = At + B$. Θέτουμε την μερική λύση στην (1) και ευρίσκουμε $B = 0, A = \frac{b}{\omega^2}$. Η ομογενής είναι η $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Η λύση της ομογενούς είναι $x_c = G\cos(\omega t + \varphi)$, όπου φ είναι η αρχική φάση. Η γενική λοιπόν λύση είναι $x = x_c + x_p = G\,cos(\omega t + \varphi) + \frac{b}{\omega^2}t$. Στην έκφραση της απομακρύνσεως ο πρώτος όρος παριστά αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους . Ο δεύτερος δηλώνει μετακίνηση με σταθερή ταχύτητα προς τα θετικά x. Επομένως το υλικό σημείο ταλαντούται γύρω από μια θέση ισορροπίας, η οποία μετατοπίζεται ισοταχώς κατά μήκος του άξονα

Οχ. Στην περίπτωση των δυνάμεων $F_1 = kx$ και $F_2 = \lambda t$ η διαφορική εξίσωση της κινήσεως γίνεται $m\ddot{x}\mathbf{i} = kx\mathbf{i} + \lambda t\mathbf{i} \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = bt$ (2). Ως μερική λύση δοκιμάζουμε την $x_p = At + B$ και ευρίσκουμε $B = 0, A = -\dfrac{b}{\omega^2}$. Η ομογενής είναι η $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$. Η λύση της ομογενούς είναι $x_c = Ce^{-\omega t} + De^{\omega t}$.

Η γενική λύση είναι $x = x_c + x_p = Ce^{-\omega t} + De^{\omega t} - \dfrac{b}{\omega^2}t$.

5. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας $x = 0$ ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση επ' ευθείας, είναι η λύση της διαφορικής εξισώσεως $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της εξίσωσης αυτής με $\dot{x}$,να αποδειχθεί ότι η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ παρέχεται από την σχέση $b\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$. Να γίνει εφαρμογή για $t_1 = 0$ $t_2 = T$,όπου T είναι η περίοδος, αν για $t = 0$ είναι $x = x_0, \dot{x} = 0$.

Απάντηση: $W = -\dfrac{mx_0^2\omega_0^2}{2}(1 - e^{-2\gamma T})$.

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνουμε.

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ με $\dot{x}$ και λαμβάνουμε $m\ddot{x}\dot{x} + b\dot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$. Η σχέση αυτή γράφεται $\dfrac{1}{2}m\dfrac{d}{dt}(\dot{x}^2) + \dfrac{1}{2}k\dfrac{d}{dt}(x^2) + b\dot{x}^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}md\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kdx^2 + b\dot{x}^2 dt = 0$ (1). Έστω $x = x_1, \dot{x} = \dot{x}_1$ για $t = t_1$ και $x = x_2, \dot{x} = \dot{x}_2$ για $t = t_2$. Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε $\dfrac{1}{2}m\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} d\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}k\int_{x_1}^{x_2} dx^2 + \int_{t_1}^{t_2} b\dot{x}^2 dt = 0$. Συνεπώς $\dfrac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) + \dfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = -b\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$ (2) . Στο αριστερό μέλος της εξισώσεως ο πρώτος όρος παριστά την μεταβολή της κινητικής ενέργειας και ο δεύτερος την μεταβολή της δυναμικής. Επομένως η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ισούται με το έργο των αντιστάσεων.

Εφαρμογή. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματος είναι $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Διαιρούμε με την μάζα και έχουμε προς επίλυση την $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (3), όπου $2\gamma = \dfrac{b}{m}$ και $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Η λύση της (3) είναι η $x = C_1 e^{-\gamma t + i\omega t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega t} \Rightarrow x = e^{-\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$, όπου $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Αλλά $\cos\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ και $\sin\omega t = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$. Η λύση επομένως εκφράζεται και ως $x = e^{-\gamma t}(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t)$ (4). Από τις αρχικές συνθήκες $x = x_0$ και $\dot{x} = 0$ για $t = 0$ ευρίσκουμε $A_1 = x_0$ και $A_2 = \dfrac{\gamma x_0}{\omega}$. Άρα η λύση γράφεται $x = e^{-\gamma t}(x_0\cos\omega t + \dfrac{x_0\gamma}{\omega}\sin\omega t)$. Στην (4) θέτουμε $A_2 = A_1\tan\varphi$. Επομένως η έκφραση (4) αποκτά την μορφή $x = A_1 e^{-\gamma t}(\cos\omega t + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\omega t) \Rightarrow x = \dfrac{A_1}{\cos\varphi}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$ (5). Αλλά $\dfrac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \tan^2\varphi}$. Συνεπώς $x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$ ή $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$, όπου $A = x_0\dfrac{\omega_0}{\omega}$. Στο τέλος της πρώτης περιόδου είναι $t = T$ και το σώμα ευρίσκεται στη θέση $x_2 = Ae^{-\gamma T}\cos\varphi = x_0 e^{-\gamma T}$ και εκεί η ταχύτητα είναι $\dot{x} = -Ae^{-\gamma T}(\gamma\cos\varphi - \omega\sin\varphi)$. Αλλά $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ και

$sin\,\varphi = \dfrac{tan\,\varphi}{\sqrt{1+tan^2\varphi}} = \dfrac{\gamma}{\omega_0}$ Επομένως $\dot{x}=0$. Αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος της (2) και ευρίσκουμε $W = -\dfrac{m x_0^2 \omega_0^2}{2}(1-e^{-2\gamma T})$.

6. Στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο έργο υπό της δυνάμεως εξαναγκασμού μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ισούται με το άθροισμα της ενέργειας που χάνεται λόγω των αντιστάσεων συν την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος. **Απάντηση:** $\frac{1}{2}m(u_2^2-u_1^2)+\frac{1}{2}k(x_2^2-x_1^2)+W_{αντ.} = W_{εξωτ.}$

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της διαφορικής εξισώσεως της κινήσεως επί $\dot{x}$ και ακολούθως ολοκληρώνουμε λαμβάνοντας κατάλληλα όρια.

Λύση. Η διαφορική εξίσωση της εξαναγκασμένης αρμονικής ταλαντώσεως είναι $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx = F_0\,cos(\omega t+\varphi_0)$. Θα υπολογίσουμε το έργο της αντιστάσεως και της δυνάμεως εξαναγκασμού μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 για τις οποίες οι συνθήκες είναι $x=x_1, \dot{x}=u_1$ και $x=x_2, \dot{x}=u_2$, αντιστοίχως. Προς τούτο πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) επί $\dot{x}$, οπότε η (1) γίνεται $m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}+b\dot{x}^2 = F(t)\dot{x}$ ή $\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{x}^2)+\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2)+b\dot{x}^2 = F(t)\dot{x}$.

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή . $\frac{1}{2}m\int_{\dot{x}_1}^{\dot{x}_2} d(\dot{x}^2)+\frac{1}{2}k\int_{x_1}^{x_2} d(x^2)+\int_{t_1}^{t_2} b\dot{x}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\dot{x}dt$. Άρα $\frac{1}{2}m(u_2^2-u_1^2)+\frac{1}{2}k(x_2^2-x_1^2)+W_{αντ.} = W_{εξωτ.}$. Το έργο της δυνάμεως εξαναγκασμού ισούται με την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος συν την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω των αντιστάσεων.

3η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της κινήσεως σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$ παίρνει την μορφή **α)** $\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = \frac{mr^4F(r)}{L^2}$. **β)** $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \lambda = -\frac{m}{L^2\lambda^2}f(\lambda)$, όπου $\lambda = \frac{1}{r}$.

Υπόδειξη: Γράφουμε την εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου στο κεντρικό πεδίο σε πολικές συντεταγμένες $m\ddot{\mathbf{r}} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta = F(r)\,\mathbf{e}_r$. Από την μορφή της εξισώσεως συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι επί μέρους εξισώσεις $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r)$ και $\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$. Από την δεύτερη εξάγουμε την σταθερότητα της στροφορμής . Επομένως $mr^2\dot{\theta}=L \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$. Την έκφραση αυτή του $\dot{\theta}$ αντικαθιστούμε στην πρώτη των επί μέρους εξισώσεων , οπότε λαμβάνουμε $m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = F(r)$. Σε αυτήν χρησιμοποιούμε την σχέση $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$, με $\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$ ενώ ανάλογη έκφραση προκύπτει για την $\ddot{r}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμεθα στην αποδεικτέα σχέση.

Λύση. α) Το πεδίο είναι κεντρικό. Άρα η εξίσωση της κινήσεως είναι $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r)$ (1) και η στροφορμή **L** διατηρείται. Επομένως $mr^2\dot{\theta}=L \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$ (2). Από την έκφραση $r=r(\theta)$ δια παραγωγίσεως ως προς τον χρόνο, έχουμε $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$.Με την βοήθεια της (2) η τελευταία γράφεται $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2}$. Με όμοιο τρόπο ευρίσκουμε ότι $\ddot{r}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{L^2}{m^2r^4} - \frac{dr}{d\theta}\frac{2L}{mr^3}\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2} \Rightarrow$
$\ddot{r}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{L^2}{m^2r^4} - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{2}{m^2r^5}L^2$. Άρα η (1) γίνεται $m\frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{L^2}{m^2r^4} - m\frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - m\frac{rL^2}{m^2r^4}=F(r)$ και τελικώς $\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r=F(r)\frac{mr^4}{L^2}$.

β) Σε ανάλογη μορφή καταλήγουμε χρησιμοποιώντας την μεταβλητή $\lambda = \frac{1}{r}$, ως εξής

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d\lambda}{d\theta}.$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\left(-\frac{L}{m}\right)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right) = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}.$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r)$ γράφεται $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \lambda = -\frac{m}{L^2\lambda^2}f(\lambda)$

2. Να αποδειχθεί ότι εάν η τροχιά υλικού σημείου εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων είναι έλλειψη της οποίας η μία εκ των εστιών είναι το ελκτικό κέντρο, οι κεντρικές δυνάμεις είναι αντιστρόφως ανάλογοι του τετραγώνου της αποστάσεως του σημείου από το ελκτικό κέντρο.

Λύση. Η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς είναι $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ (1)και η εξίσωση της κινήσεως έχει τη μορφή $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}-\dfrac{2}{r}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r=\dfrac{mr^4}{L^2}F(r)$ (2). Είναι $\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$ και

$\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=\dfrac{pe\cos\theta(1+e\cos\theta)+2pe^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^3}$.Αντικαθιστώντας στην (2), έχουμε

$\dfrac{pe\cos\theta(1+e\cos\theta)+2pe^2\sin^2\theta-2pe^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^3}-r=\dfrac{m^2r^4}{L^2}F(r)$.Με τη βοήθεια της (1) η τελευταία σχέση γίνεται $-\dfrac{r^2}{p}=\dfrac{m^2r^4}{L^2}F(r)$. Επομένως $F(r)=-\dfrac{L^2}{m^2p}\dfrac{1}{r^2}$.

Σημείωση: Η σχέση $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ ισχύει για ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική τροχιά , συνεπώς η αποδεικτέα σχέση $F(r)=-\dfrac{L^2}{m^2p}\dfrac{1}{r^2}$ υποδεικνύει ότι η κίνηση τελείται υπό την επίδραση ελκτικού κεντρικού πεδίου της μορφής $\mathbf{F}=-\dfrac{k}{r^2}\mathbf{e}_r$. Στο πεδίο αυτό το ελκτικό κέντρο κατέχει την μία εστία της ελλείψεως , την μοναδική εστία της παραβολής ή την εστία της υπερβολής , ο κλάδος της οποίας στρέφει τα κοίλα προς την εστία αυτή.

3. Υλικό σημείο $P(m)$ κινείται υπό την επίδραση της δυνάμεως $\mathbf{F}=-km\left[4\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^3\right]\mathbf{e}_r$ όπου r=OP και O είναι το ελκτικό κέντρο. Το P εκτοξεύεται από σημείο με $r=\alpha$ και με ταχύτητα που έχει ακτινική και εγκάρσια συνιστώσα ίσες με $\sqrt{\alpha k}$. Να αποδειχθεί ότι το σωματίδιο κινείται στον δακτύλιο που ορίζεται από τους κύκλους $r=2\alpha$ και $r=2\alpha/3$ και να βρεθεί η γωνία δύο διαδοχικών γραμμών των αψίδων.

Λύση. Από την σχέση $\dfrac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\dfrac{1}{r}=-\dfrac{mr^2}{L^2}F(r)$, όπου $L=mr^2\dot{\theta}=m\alpha\sqrt{\alpha k}$. Έχουμε

$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}+\frac{4}{r}=\frac{4}{\alpha}$. Η λύση της εξισώσεως αυτής είναι $\frac{1}{r}=A\,cos(2\theta+\varphi_0)+\frac{1}{\alpha}$ οπότε $-\frac{\dot r}{r^2}=-A2\dot\theta\, sin(\theta+\varphi_0)$.Οι αρχικές συνθήκες είναι $t=0$: $r=\alpha$, $\theta=0$, $\dot r_0=\alpha\dot\theta_0=\sqrt{\alpha k}$. Επομένως $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ και $A=\frac{1}{2\alpha}$. Η εξίσωση του δρόμου γράφεται $r=\frac{2\alpha}{2+cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Για $cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=1$, το $r=\frac{2\alpha}{3}=$ ελάχιστο, οπότε $2\theta_1+\frac{\pi}{2}=0$.Για $cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-1$, το $r=2\alpha=$ μέγιστο, οπότε $2\theta_2+\frac{\pi}{2}=\pi$.Επομένως $\theta_2-\theta_1=\frac{\pi}{2}$.

4. Υλικό σημείο P μάζας m κινείται εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων με κέντρο το O και με δυναμικό $U=kr$, όπου k θετική σταθερά και r=OP. Να ευρεθούν οι τιμές της ενέργειας και της στροφορμής, για τις οποίες το σώμα γράφει κυκλική τροχιά (O,α)και να υπολογιστεί η περίοδος T_0 της κινήσεως. Να αποδειχθεί ότι αν το P διαταραχθεί ελάχιστα από την τροχιά του, θα εκτελέσει μικρές ακτινικές ταλαντώσεις με περίοδο $T=T_0\sqrt{3}$.

Απάντηση: (α) Η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E=\frac{1}{2}mu^2+U\Rightarrow E=\frac{3k\alpha}{2}$. Η στροφορμή υπολογίζεται από τη σχέση $L=mu\alpha$. Τέλος η περίοδος της κινήσεως ισούται με $T_0=\frac{2\pi\alpha}{u}$. (β) Έστω ε μικρή διαταραχή από την κυκλική τροχιά. Η διαφορική εξίσωση της διαταραγμένης κινήσεως είναι $\ddot\varepsilon+\frac{3k}{m\alpha}\varepsilon=0$, επομένως το σώμα καθώς κινείται κυκλικά εκτελεί ταυτόχρονα γραμμική αρμονική ταλάντωση επί της ακτίνας με περίοδο $T=T_0\sqrt{3}$.

Υπόδειξη: Για το δεύτερο ερώτημα θέτουμε $r=\alpha+\varepsilon$ στην εξίσωση της κινήσεως $m\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)=F(r)$, όπου α είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς και ε είναι μικρή διαταραχή με $\varepsilon<<\alpha$. Στην προκύπτουσα σχέση $m\left(\ddot\alpha+\ddot\varepsilon-\frac{u^2\alpha^2}{(\alpha+\varepsilon)^3}\right)=-k$ αναπτύσσουμε τον παρονομαστή σε σειρά δυνάμεων του ε χρησιμοποιώντας τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα και αφού αγνοήσουμε όρους δευτέρας τάξεως θα καταλήξουμε στην διαφορική εξίσωση της αρμονικής ταλαντώσεως.

Λύση. Υπολογίζουμε την δύναμη από τη σχέση $F=-\frac{dU}{dr}$.Άρα $F=-k$. Η δύναμη είναι κεντρομόλος, επομένως $\frac{mu^2}{\alpha}=k\Rightarrow u=\sqrt{\frac{k\alpha}{m}}$ (1). Η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E=\frac{1}{2}mu^2+U\Rightarrow E=\frac{3k\alpha}{2}$. Η στροφορμή υπολογίζεται από τη σχέση $L=mu\alpha$. Τέλος η περίοδος της κινήσεως ισούται με $T_0=\frac{2\pi\alpha}{u}$.

Έστω ε η μικρή διαταραχή από την κυκλική τροχιά. Επομένως η ακτινική απόσταση του σωματιδίου από το O θα γίνει $r=\alpha+\varepsilon$. Η εξίσωση της κινήσεως στην πιο γενική μορφή είναι $m\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)=F(r)$.

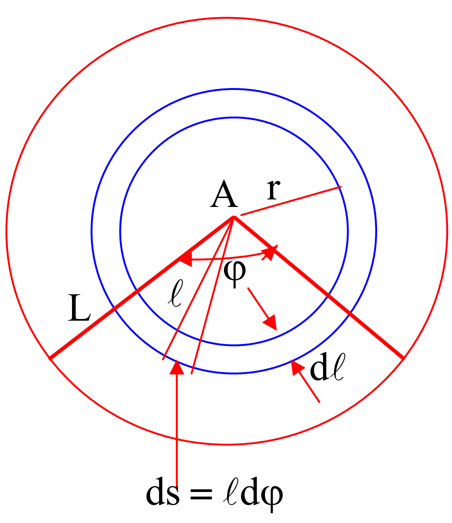
Σ' αυτήν αντικαθιστούμε το r με το ίσο του και επίσης, από την σταθερά της στροφορμής , θέτουμε $\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}$. Η εξίσωση της κινήσεως γράφεται, $m\left(\ddot{\alpha}+\ddot{\varepsilon}-\frac{u^2\alpha^2}{(\alpha+\varepsilon)^3}\right)=-k \Rightarrow m\ddot{\varepsilon}-\frac{mu^2}{\alpha}+\frac{3m\varepsilon u^2}{\alpha^2}+O(\varepsilon^2)=-k$. Αγνοώντας όρους τάξεως ε^2 και ε^3 και λόγω της (1), η τελευταία σχέση αποκτά την μορφή $\ddot{\varepsilon}+\frac{3k}{m\alpha}\varepsilon=0$ (2). Θέτουμε $\omega^2=\frac{3k}{m\alpha}=\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m\alpha}{3k}}$. Επομένως $T=T_0\sqrt{3}$.

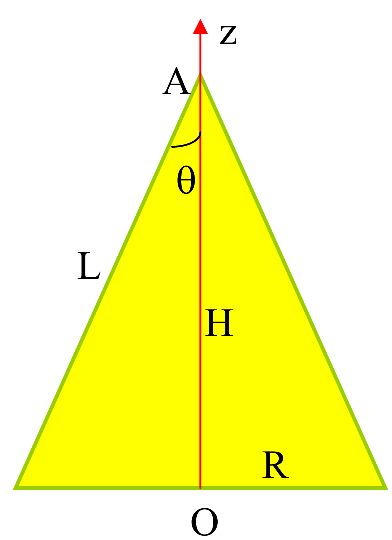
5. α) Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της ομογενούς παράπλευρης επιφάνειας ορθού κυκλικού κώνου, ο οποίος έχει ύψος H και ακτίνα βάσεως R. β) Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της ολικής ομογενούς επιφάνειας ορθού κυκλικού κώνου(παράπλευρης συν βάσεως) , ο οποίος έχει ύψος H και ακτίνα βάσεως R.

Απάντηση: Έστω O το κέντρο της βάσεως, το οποίο λαμβάνεται ως η αρχή του άξονα z. (α) $z_c=\frac{H}{3}$.

(β) $z_c=\frac{H^2}{3(R\cos\theta+H)}$.

Υπόδειξη: (α) Λαμβάνουμε τον άξονα συμμετρίας του κώνου ως τον άξονα Oz, όπου O είναι το κέντρο της βάσεως του κώνου. Η θέση του κέντρου μάζας της παράπλευρης επιφάνειας δίδεται από τη σχέση $z_c=\frac{\int z\,dm}{\int dm}$. Η παράπλευρη επιφάνεια είναι κυκλικός τομέας με κορυφή την κορυφή A του κώνου και με ακτίνα L. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα πρέπει προηγουμένως να εκφράσουμε το z συναρτήσει του ℓ, όπου με ℓ συμβολίζουμε την απόσταση ενός σημείου της παράπλευρης επιφάνειας από το A. Το $dm=\rho dS=\rho ds d\ell$, όπου $ds=\ell d\varphi$ και το μεν ℓ μεταβάλλεται από 0 έως L, το δε φ μεταβάλλεται από $\varphi=0$ έως $\varphi=\frac{2\pi R}{L}$.





Λύση. α)Έστω Ο το κέντρο της βάσεως, το οποίο λαμβάνεται ως η αρχή του άξονα z. Η παράπλευρη επιφάνεια , αν αναπτυχθεί σε επίπεδο θα είναι ένας κυκλικός τομέας με ακτίνα L και με μήκος τόξου ίσο προς $2\pi R$. Άρα η επίκεντρος γωνία του τόξου αυτού θα ισούται με $\varphi = \frac{2\pi R}{L}$. Έστω A η κορυφή του τομέα. Σε απόσταση ℓ από το A θεωρούμε μία στοιχειώδη τομή της παράπλευρης επιφάνειας, σε πολικές συντεταγμένες με εμβαδόν $dS = d\ell ds$, όπου $ds = \ell d\varphi$ και το μεν ℓ μεταβάλλεται από 0 έως L , το δε φ μεταβάλλεται από 0 έως $\varphi = \frac{2\pi R}{L}$. Ολοκληρώνοντας την παράσταση αυτή βρίσκουμε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ίσο με $S = \pi RL$. Το κέντρο μάζας της παράπλευρης επιφάνειας βρίσκεται πάνω στον άξονα z, λόγω συμμετρίας. Η θέση του δίδεται από τη σχέση $\overline{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}$, όπου η περιοχή ολοκληρώσεως είναι η παράπλευρη επιφάνεια και $dm = \rho\ell d\ell d\varphi = \rho\ell d\ell \frac{L}{2\pi R}$. Στη σχέση αυτή ρ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του κώνου και τα όρια ολοκλήρωσης είναι το μηδέν και το L. Επειδή ολοκληρώνουμε ως προς ℓ πρέπει να προσέξουμε ότι το $z = H - \ell \cos\theta$, όπου $\cos\theta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}$ δηλαδή θ είναι η γωνία μεταξύ της γενέτειρας και του ύψους και $L^2 = H^2 + R^2$.

Ο παρονομαστής δίδει $\int dm = \pi\rho RL$. Τελικά $\overline{z} = \frac{H}{3}$.

β) Έστω z_c η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος. Το σύστημα αποτελείται από ένα υλικό σημείο μάζας $m_1 = \pi\rho RH/\cos\theta$ με συντεταγμένη $z_1 = \frac{H}{3}$ και από ένα δεύτερο υλικό σημείο μάζας $m_2 = \pi\rho R^2$ με συντεταγμένη $z_2 = 0$. Η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος δίδεται από τη σχέση $z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$.

<u>4^η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

1. Μικρός δακτύλιος κινείται κατά μήκος ευθυγράμμου λείου σύρματος και η θέση του ως προς σημείο Ο του σύρματος δίδεται από την σχέση $\alpha \cos nt$. Το σύρμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα, ο οποίος διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στο σύρμα. Να ευρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του δακτυλίου ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Απάντηση:

$$\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = -\mathbf{I}\alpha(n \sin nt \cos \omega t + \omega \cos nt \sin \omega t) + \mathbf{J}\alpha(\omega \cos nt \cos \omega t - n \sin nt \sin \omega t),$$

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = \mathbf{I}\alpha[2n\omega \sin nt \sin \omega t - (n^2+\omega^2)\cos nt \cos \omega t] - \mathbf{J}\alpha[2n\omega \sin nt \cos \omega t + (n^2+\omega^2)\cos nt \sin \omega t]$$

.

Υπόδειξη: Σχεδιάζουμε τα δύο συστήματα αναφοράς $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ και $S(Oxyz)$.Ο άξονας περιστροφής Oz συμπίπτει με τον άξονα $O\zeta$. Έστω $\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J}$ το διάνυσμα θέσεως του δακτυλίου ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ως προς το μη αδρανειακό. Λαμβάνομε τον άξονα Ox επί του σύρματος οπότε $\mathbf{r} = x\mathbf{i} = \mathbf{i}\alpha \cos nt$. Η ταχύτητα του δακτυλίου ως προς το μη αδρανειακό σύστημα S είναι $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_S = \mathbf{u}_\sigma = \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{i}\alpha n \sin nt$. Από την σχέση $\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_S + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ θα προσδιοριστεί η ταχύτητα του σώματος ως προς το αδρανειακό. Εκτελούμε τις πράξεις και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{J}\sin\theta$, $\mathbf{j} = -\mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$, όπου $\theta = \omega t$, μέσω του οποίου εκφράζουμε την ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα. Εργαζόμεθα αναλόγως για τον προσδιορισμό της επιταχύνσεως $\left.\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$.

Λύση. Έστω $S_0(O\xi\eta\zeta)$ το ακίνητο σύστημα αναφοράς και $S(Oxyz)$ το στρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα Oz, ο οποίος συμπίπτει με τον $O\zeta$. Έστω $\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J}$ το διάνυσμα θέσεως του δακτυλίου ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ως προς το μη αδρανειακό. Επειδή τα δύο συστήματα έχουν κοινή αρχή, είναι $\mathbf{R} = \mathbf{r}$. Εκείνο που διαφοροποιεί το ένα διάνυσμα από το άλλο είναι οι διαφορετικές εκφράσεις για τις συνιστώσες των $\mathbf{R}$ και $\mathbf{r}$. Για το στρεφόμενο σύστημα αναφοράς λαμβάνουμε τον άξονα Ox επί του σύρματος, οπότε το διάνυσμα θέσεως του δακτυλίου ως προς το μη αδρανειακό σύστημα $Oxyz$ είναι $\mathbf{r} = \mathbf{i}\alpha \cos nt$. Η ταχύτητα του δακτυλίου ως προς το μη αδρανειακό σύστημα S είναι $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_S = \mathbf{u}_\sigma = \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{i}\alpha n \sin nt$. Η ταχύτητα του σύρματος (απόλυτη ταχύτητα) ως προς το αδρανειακό (και ακίνητο στο παρόν παράδειγμα) προσδιορίζεται από την σχέση $\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_S + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. σύστημα αναφοράς. Συνεπώς $\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = -\mathbf{i}\alpha n \sin nt + \mathbf{j}\alpha\omega \cos nt$. Παρατηρούμε όμως ότι στην έκφραση αυτή οι συνιστώσες της ταχύτητας περιέχουν τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$ και όχι τα $\mathbf{I}, \mathbf{J}$. Για να τις εκφράσουμε ως προς το αδρανειακό σύστημα , χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{J}\sin\theta$, $\mathbf{j} = -\mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$, όπου $\theta = \omega t$. Τελικά έχουμε

$$\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = -\mathbf{I}\alpha(n \sin nt \cos \omega t + \omega \cos nt \sin \omega t) + \mathbf{J}\alpha(\omega \cos nt \cos \omega t - n \sin nt \sin \omega t) \quad (1).$$

Αυτή είναι η έκφραση της ταχύτητας ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμεθα για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Είναι $\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{S_0} = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_S + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}$, όπου $\mathbf{u} = -\mathbf{i}\alpha n \sin nt + \mathbf{j}\alpha\omega \cos nt$. Επομένως

$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = -\mathbf{i}\alpha(n^2+\omega^2)\cos nt - 2\mathbf{j}\alpha n\omega \sin nt$. Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμεθα αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, όπου $\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{i}\alpha n^2 \cos nt$ και $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Για να εκφράσουμε τις συνιστώσες της επιταχύνσεως ως προς το αδρανειακό σύστημα θέτουμε πάλι $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{J}\sin\theta$ και $\mathbf{j} = -\mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$,οπότε

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = \mathbf{I}\alpha[2n\omega\sin nt\sin\omega t - (n^2+\omega^2)\cos nt\cos\omega t] - \mathbf{J}\alpha[2n\omega\sin nt\cos\omega t + (n^2+\omega^2)\cos nt\sin\omega t]$$
(2)

Στην σχέση (2) οδηγούμεθα επίσης αν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο την σχέση (1).

2. Το σύστημα αναφοράς S(Oxyz) περιστρέφεται ως προς αδρανειακό σύστημα $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = 2t\boldsymbol{\iota} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Τα $\boldsymbol{\iota}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος S(Oxyz). Τα $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ και S(Oxyz) έχουν κοινή αρχή O. Να βρεθεί η έκφραση της ταχύτητας και της επιταχύνσεως ως προς το αδρανειακό σύστημα ενός σημείου P, του οποίου το διάνυσμα θέσεως είναι $\mathbf{r} = t\boldsymbol{\iota} + 2t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Υπόδειξη: Σχεδιάζουμε τα δύο συστήματα αναφοράς $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ και S(Oxyz) .Ο άξονας περιστροφής Oz συμπίπτει με τον άξονα Οζ. Έστω $\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J}$ το διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ως προς το μη αδρανειακό. Η ταχύτητα του υλικού σημείου ως προς το μη αδρανειακό σύστημα S είναι $\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{S} = \mathbf{u}_\sigma = \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{i}\alpha n\sin nt$. Από την σχέση $\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{S} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ θα προσδιοριστεί η ταχύτητα του σώματος ως προς το αδρανειακό. Εκτελούμε τις πράξεις και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{J}\sin\theta$, $\mathbf{j} = -\mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$, όπου $\theta = \omega t$, μέσω του οποίου εκφράζουμε την ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα. Εργαζόμεθα αναλόγως για τον προσδιορισμό της επιταχύνσεως $\left.\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$.

Λύση. Ως προς το στρεφόμενο σύστημα αναφοράς η ταχύτητα ισούται με $\mathbf{u}|_S = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}+4t\mathbf{j}$. Η ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα είναι $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Άρα $\mathbf{u} = \left(1+9t^2+2t^5\right)\boldsymbol{\iota}+\left(t^4-2t\right)\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$. Θέτουμε $\alpha = 1+9t^2+2t^5$, $\beta = t^4-2t$ και $\gamma = t^3$. Άρα $\mathbf{u} = \alpha\,\boldsymbol{\iota}+\beta\,\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$. Κατόπιν εκφράζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\boldsymbol{\iota}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ του συστήματος S(Oxyz) ως προς τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ του αδρανειακού συστήματος S_0 σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{J}\sin\theta$, $\mathbf{j} = -\mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$, $\mathbf{k} = \mathbf{K}$, όπου $\theta = \omega t$. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε την έκφραση της ταχύτητας στο αδρανειακό σύστημα. Είναι $\mathbf{u} = (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)\mathbf{I}+(\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)\mathbf{J}+\gamma\mathbf{K}$.

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου ως προς το μη αδρανειακό σύστημα είναι $\mathbf{a}|_S = \ddot{\mathbf{r}} = 4\mathbf{j}$. Η επιτάχυνση του υλικού σημείου ως προς το αδρανειακό σύστημα είναι

$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Άρα,

$\mathbf{a} = \left(18t - 8t^4 + 3t^5 - t^7\right)\boldsymbol{\iota} + \left(-2 + 5t^3 - 2t^4 + 9t^5 - 2t^8\right)\mathbf{j} + \left(-4t^2 + 2t^5 - 27t^4 + 6t^7\right)\mathbf{k}$.

Θέτουμε $A = \left(18t - 8t^4 + 3t^5 - t^7\right)$, $B = \left(-2 + 5t^3 - 2t^4 + 9t^5 - 2t^8\right)$ και $\Gamma = \left(-4t^2 + 2t^5 - 27t^4 + 6t^7\right)$.

Άρα $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + \Gamma\mathbf{k}$. Ακολούθως εκφράζουμε τα $\boldsymbol{\iota}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ συναρτήσει των $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ και κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε την έκφραση της επιταχύνσεως στο αδρανειακό σύστημα. Είναι $\mathbf{a} = (A\cos\theta - B\sin\theta)\mathbf{I} + (A\sin\theta + B\cos\theta)\mathbf{J} + \Gamma\mathbf{K}$