Από το βιβλίο του κ. Γεωργίου Κατσιάρη «ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ» τις ασκήσεις:

1^{ον}] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: 1.2, 1.3
2^{ον}] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: 2.1, 2.4, 2.9
3^{ον}] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: 3.1, 3.2, 3.6, 3.7

<u>Λύσεις ασκήσεων</u>

1^{ον}] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:

1.2
Σύμφωνα με την αντίστοιχη θεωρία.

1.3
Για να είναι ολοκληρώσιμη η εξίσωση $A_x dx + A_y dy + A_z dz = 0$, αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η

$$A_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)+A_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)=0,$$

το οποίο ισχύει στη παρούσα περίπτωση.

2^{ov}] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:

2.1
Η εξίσωση της κίνησης του συστήματος είναι:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$, όπου

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-e^{\alpha t}\omega^2 x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=e^{\alpha t}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=e^{\alpha t}\left(\alpha\dot{x}+\ddot{x}\right)$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega^2 x=0$$

2.4
Ως γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος θεωρούμε τις (x, θ), όπου x είναι η απόσταση της μάζας M από το σημείο O για κάθε χρονική στιγμή και θ είναι η γωνία την οποία σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο.

Τα διανύσματα θέσεως των δύο μαζών M και m είναι αντίστοιχα:

$\mathbf{R}=x\mathbf{i}$ και $\mathbf{r}=\left(x+l\sin\theta\right)\mathbf{i}-l\cos\theta\,\mathbf{j}$, όπου l είναι το μήκος του φυσικού εκκρεμούς.

Στο σύστημά μας ασκούνται οι κατωτέρω διατηρητικές δυνάμεις:
Τα βάρη των δύο σωμάτων, η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη **F**.

Προκειμένου για τον υπολογισμό των εξισώσεων Lagrange και επομένως της συναρτήσεως Lagrange (L=T-V) απαιτείται ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής του συστήματος.

Για τον υπολογισμό των κινητικών ενεργειών των δύο μαζών υπολογίζουμε τα $\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{R}},\ddot{\mathbf{R}}$.

Έτσι η συνάρτηση Lagrange του συστήματος είναι η:

$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2\dot{x}l\cos\theta\dot{\theta}\right)-\left(\frac{1}{2}k\left(x-l_0\right)^2-mgl\cos\theta-A\left(x+l\sin\theta\right)\right),$$

όπου l_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Οι δύο εξισώσεις κίνησης είναι οι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \ldots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \ldots$$

Η θέση ισορροπίας του συστήματος προκύπτει αν θέσουμε στο σύστημα την λύση $x = x_0$ και $\theta = \theta_0$. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε ότι

$$x_0 = \frac{A}{k} + l_0 \text{ και } \theta_0 = \tan^{-1}\frac{A}{mg}.$$

2.9

Ως γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος θεωρούμε τις (s, θ), όπου s είναι το μήκος του ελατηρίου για κάθε χρονική στιγμή και θ είναι η γωνία την οποία σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο.

Ο τρόπος επίλυσης είναι όμοιος με αυτόν της ασκήσεως 2.4.

3ον] ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:

3.1

Από τον μετασχηματισμό του Legendre έχουμε:

$$H=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}-L=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2-\alpha x^3+\beta x\dot{x}^2 .$$

Όμως η γενικευμένη ορμή είναι

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}+2\beta x\dot{x}\Rightarrow \dot{x}=\frac{p_x}{1+2\beta x} .$$

Επομένως η συνάρτηση Hamilton γράφεται ως

$$H(x,p_x,t)=\frac{1}{2}\frac{p_x{}^2}{1+2\beta x}+\frac{1}{2}\omega^2x^2-\alpha x^3 .$$

3.2

a)

Από τον μετασχηματισμό του Legendre έχουμε:

$$L=\frac{\partial H}{\partial p}p-H=\frac{1}{2}p^2 .$$

Όμως η γενικευμένη ταχύτητα είναι

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=p+\sin q\Rightarrow p=\dot{q}-\sin q .$$

Επομένως η συνάρτηση Lagrange γράφεται ως

$$H(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}(\dot{q}-\sin q)^2 .$$

b) Με όμοιο τρόπο

Προσοχή στο βιβλίο υπάρχει ένα τυπογραφικό λάθος. Εντός της παρενθέσως είναι το εσωτερικό γινόμενο ($\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}$), όπου **α** είναι σταθερό διάνυσμα.

3.6

Μπορεί να επιλυθεί ως συνδυασμός των προηγούμενων ασκήσεων