26-04-2011

1. Όχημα μάζας m ξεκινά από την αρχή του άξονα x χωρίς αρχική ταχύτητα και κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση της δυνάμεως $F = mk(1-e^{-t})$, όπου k θετική σταθερά. Στο όχημα ασκείται επίσης αντίσταση $R = mcu$, όπου u η ταχύτητα και c θετική σταθερά. Να ευρεθεί η ταχύτητα του οχήματος συναρτήσει του χρόνου.

Απάντηση: $u = \frac{k}{c} - \frac{k}{c-1}e^{-t} + \frac{k}{c(c-1)}e^{-ct}$.

2. Υλικό σημείο μάζας m κινείται ευθυγράμμως εντός μέσου, το οποίο προβάλλει αντίσταση $au + bu^3$ στην κίνηση του σώματος, όπου u η ταχύτητα και a,b σταθερές. Αν αυτή είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα και αν τούτο έχει αρχική ταχύτητα u_0, να ευρεθεί το διάστημα που θα διανύσει ,έως ότου μηδενιστεί η ταχύτητά του. Ακολούθως να υπολογιστεί το χρονικό διάστημα εντός του οποίου η ταχύτητα ελαττώνεται από u_0 σε $u_0/2$.

Απάντηση: (α) $s = \frac{m}{\sqrt{ab}} tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}u_0\right)$, (β) $t = \frac{m}{2a} ln\frac{4a + bu_0^2}{a + bu_0^2}$.

3. Βλήμα μάζας m εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα άνω με αρχική ταχύτητα u_0. Ο αέρας επιφέρει επιβράδυνση ίση με mku, όπου u η ταχύτητα του βλήματος και $k>0$. Εάν το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος του h σε χρονικό διάστημα T , να αποδειχθεί ότι $u_0=kh+gT$.

4. Υλικό σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα Vσε οριζόντιο κύκλο (K,α) , το κέντρο K του οποίου έχει συντεταγμένες (0,0,h). Να προσδιοριστεί η θέση του υλικού σημείου ως προς παρατηρητή ευρισκόμενο στην αρχή O(0,0,0). Εξαρτάται η ταχύτητα του υλικού σημείου από την θέση του παρατηρητή;

Απάντηση: (α) $\dot{\mathbf{r}} = V\left(-\mathbf{i}\, sin\frac{Vt}{\alpha} + \mathbf{j}\, cos\frac{Vt}{\alpha}\right)$, (β) Η ταχύτητα του υλικού σημείου δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

5. Το διάνυσμα θέσεως υλικού σημείου ως προς παρατηρητή ευρισκόμενο στην αρχή O(0,0,0) ακίνητου συστήματος αναφοράς ισούται με $\mathbf{r} = \mathbf{i}\alpha\, cos\,\omega t\, sin\,\Omega t + \mathbf{j}\alpha\, sin\,\omega t\, sin\,\Omega t + \mathbf{k}\alpha\, cos\,\Omega t$, όπου α,ω,Ω σταθερές. Να αποδειχθεί ότι το υλικό σημείο κινείται επί επιφανείας σφαίρας η δε ταχύτητα αυτού ισούται με $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2 sin^2 \Omega t)^{1/2}$. Να ευρεθούν οι θέσεις στις οποίες η ταχύτητα εμφανίζει ακρότατο.

Απάντηση: (α) Η κίνηση εκτελείται σε επιφάνεια σφαίρας , (β) $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2 sin^2 \Omega t)^{1/2}$, (γ) Ελάχιστο στις θέσεις $\Omega t = 0$ και $\Omega t = \pi$ με $u = \alpha\Omega$, μέγιστο στη θέση $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ με $u = \alpha(\Omega^2 + \omega^2)^{1/2}$.

6. Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος της σπείρας $r = \alpha e^{b\theta}$, όπου r,θ πολικές συντεταγμένες, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να ευρεθεί η ακτινική και η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

7. Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος καμπύλης και το διάνυσμα θέσεως αυτού είναι $\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{\imath} + t^2\,\mathbf{j}$, όπου t ο χρόνος. Να ευρεθούν τα μέτρα της επιτροχίου και κεντρομόλου επιταχύνσεως όταν $t=2$.

Απάντηση: Επιτρόχιος $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{38}{\sqrt{10}}$, κεντρομόλος. $\dfrac{u^2}{R} = \dfrac{2888}{3}$.

1. Να ευρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ επί ενός υλικού σημείου, το οποίο κινείται από το σημείο Α(0,α) στο σημείο Β(α,0) α) κατά μήκος της ευθείας $x + y = \alpha$, β) κατά μήκος του κύκλου $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$.

Υπόδειξη: Γράψτε τον τύπο του στοιχειώδους έργου της δυνάμεως $\mathbf{F}$ για διαδρομή $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ και ολοκληρώστε κατά μήκος της διαδρομής C, την οποία δίδει το πρόβλημα. Αν η διαδρομή C είναι της μορφής $f(x,y) = 0$, τότε εκφράζουμε το y συναρτήσει του x (ή αντίστροφα) ούτως ώστε στο ολοκλήρωμα να έχουμε μία μεταβλητή .

Απάντηση: (α) $W = \dfrac{\alpha^3}{6}$, (β) $W = \alpha^3\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}\right)$.

2. Η δύναμη $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ κινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ΟΑΒΟ η οποία ορίζεται από τις γραμμές $y - 2x = -1$, $y = x^2$ και x=0. Να ευρεθεί το έργο της. Τι συμπεραίνετε για την δύναμη; Είναι συντηρητική;

Απάντηση: (α) $W = 0$. (β) Όχι, δεν το συμπεραίνουμε. Πρέπει προηγουμένως να εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Παρατηρούμε ότι τούτο είναι αληθές, επομένως τώρα συμπεραίνουμε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

3. Υλικό σημείο κινείται στον άξονα Οx και η δυναμική του ενέργεια δίδεται από την σχέση $U = \dfrac{1}{2}(2x^2 - x^3)$, όπου x είναι απόσταση του υλικού σημείου από την αρχή Ο. Να ευρεθεί η θέση και το είδος της ισορροπίας αυτού. Αν η ενέργεια του υλικού σημείου ισούται με $E = \dfrac{16}{27}$, να ευρεθούν οι επιτρεπτές περιοχές της κινήσεως και να μελετηθεί το είδος της κινήσεως εις εκάστη εξ αυτών , αναλόγως προς τις αρχικές συνθήκες.

Απάντηση: (α) $x = 0$, ευσταθής ισορροπία, $x = \dfrac{4}{3}$, ασταθής ισορροπία.

(β) Η κίνηση είναι επιτρεπτή στην περιοχή, όπου $E - U \geq 0$. Αυτή είναι η περιοχή $x \geq -\dfrac{2}{3}$.

4. Υλικό σημείο μάζας m κινείται στον άξονα Οx υπό την επίδραση των δυνάμεων $F_1 = -kx$ και $F_2 = \lambda t$. Τι κίνηση εκτελεί; Ποια είναι η έκφραση της απομακρύνσεως συναρτήσει του χρόνου; Θα άλλαζε το είδος της κινήσεως αν $F_1 = kx$ και $F_2 = \lambda t$;

Απάντηση: (α) Το σώμα μετατοπίζεται ισοταχώς με ταχύτητα $\dfrac{b}{\omega^2}$ κατά μήκος του άξονα Οx και ταυτόχρονα εκτελεί αρμονική ταλάντωση γύρω από την στιγμιαία θέση του με πλάτος $G = \left(x_0^2 + \dfrac{b^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x = G\cos(\omega t + \varphi) + \dfrac{b}{\omega^2}t$, $b = \dfrac{\lambda}{m}$, $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, (β) $x = Ce^{-\omega t} + De^{\omega t} - \dfrac{b}{\omega^2}t$. .

5. Η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας $x = 0$ ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση επ' ευθείας, είναι η λύση της διαφορικής εξισώσεως $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της εξίσωσης αυτής με $\dot{x}$,να αποδειχθεί ότι η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ παρέχεται από την σχέση $b\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$. Να γίνει εφαρμογή για $t_1 = 0$ $t_2 = T$,όπου Τ είναι η περίοδος, αν για $t = 0$ είναι $x = x_0, \dot{x} = 0$.

Απάντηση: $W = -\frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2}(1 - e^{-2\gamma T})$.

6. Στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση να αποδειχθεί ότι το παραγόμενο έργο υπό της δυνάμεως εξαναγκασμού μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ισούται με το άθροισμα της ενέργειας που χάνεται λόγω των αντιστάσεων συν την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

Απάντηση: $\frac{1}{2} m(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) + W_{αντ.} = W_{εξωτ.}$

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της κινήσεως σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$ παίρνει την μορφή **α)** $\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = \frac{mr^4F(r)}{L^2}$. **β)** $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \lambda = -\frac{m}{L^2\lambda^2}f(\lambda)$, όπου $\lambda = \frac{1}{r}$.

2. Να αποδειχθεί ότι εάν η τροχιά υλικού σημείου εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων είναι έλλειψη της οποίας η μία εκ των εστιών είναι το ελκτικό κέντρο, οι κεντρικές δυνάμεις είναι αντιστρόφως ανάλογοι του τετραγώνου της αποστάσεως του σημείου από το ελκτικό κέντρο.

3. Υλικό σημείο $P(m)$ κινείται υπό την επίδραση της δυνάμεως $\mathbf{F} = -km\left[4\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\right]\mathbf{e}_r$ όπου r=OP και O είναι το ελκτικό κέντρο. Το P εκτοξεύεται από σημείο με $r=\alpha$ και με ταχύτητα που έχει ακτινική και εγκάρσια συνιστώσα ίσες με $\sqrt{\alpha k}$. Να αποδειχθεί ότι το σωματίδιο κινείται στον δακτύλιο που ορίζεται από τους κύκλους $r=2\alpha$ και $r=2\alpha/3$ και να βρεθεί η γωνία δύο διαδοχικών γραμμών των αψίδων.

4. Υλικό σημείο P μάζας m κινείται εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων με κέντρο το O και με δυναμικό $U = kr$, όπου k θετική σταθερά και r=OP. Να ευρεθούν οι τιμές της ενέργειας και της στροφορμής, για τις οποίες το σώμα γράφει κυκλική τροχιά (O,α)και να υπολογιστεί η περίοδος T_0 της κινήσεως. Να αποδειχθεί ότι αν το P διαταραχθεί ελάχιστα από την τροχιά του, θα εκτελέσει μικρές ακτινικές ταλαντώσεις με περίοδο $T = T_0\sqrt{3}$.

Απάντηση: (α) Η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E = \frac{1}{2}mu^2 + U \Rightarrow E = \frac{3k\alpha}{2}$. Η στροφορμή υπολογίζεται από τη σχέση $L = mu\alpha$. Τέλος η περίοδος της κινήσεως ισούται με $T_0 = \frac{2\pi\alpha}{u}$. (β) Έστω ε μικρή διαταραχή από την κυκλική τροχιά. Η διαφορική εξίσωση της διαταραγμένης κινήσεως είναι $\ddot{\varepsilon} + \frac{3k}{m\alpha}\varepsilon = 0$, επομένως το σώμα καθώς κινείται κυκλικά εκτελεί ταυτόχρονα γραμμική αρμονική ταλάντωση επί της ακτίνας με περίοδο $T = T_0\sqrt{3}$.

5. α) Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της ομογενούς παράπλευρης επιφάνειας ορθού κυκλικού κώνου, ο οποίος έχει ύψος H και ακτίνα βάσεως R. β) Να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της ολικής ομογενούς επιφάνειας ορθού κυκλικού κώνου(παράπλευρης συν βάσεως) , ο οποίος έχει ύψος H και ακτίνα βάσεως R.

Απάντηση: Έστω O το κέντρο της βάσεως, το οποίο λαμβάνεται ως η αρχή του άξονα z. (α) $z_c = \frac{H}{3}$.

(β) $z_c = \frac{H^2}{3(R\cos\theta + H)}$.

1. Μικρός δακτύλιος κινείται κατά μήκος ευθυγράμμου λείου σύρματος και η θέση του ως προς σημείο O του σύρματος δίδεται από την σχέση $\alpha \cos \mathrm{nt}$. Το σύρμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα, ο οποίος διέρχεται από το O και είναι κάθετος στο σύρμα. Να ευρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του δακτυλίου ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Απάντηση:

$$\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{S_0} = -\mathbf{I}\alpha(\mathrm{n}\sin \mathrm{nt} \cos \omega t + \omega \cos \mathrm{nt} \sin \omega t) + \mathbf{J}\alpha(\omega \cos \mathrm{nt} \cos \omega t - \mathrm{n} \sin \mathrm{nt} \sin \omega t)\ ,$$

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_{S_0} = \mathbf{a} = \mathbf{I}\alpha[2\mathrm{n}\omega \sin \mathrm{nt} \sin \omega t - (\mathrm{n}^2 + \omega^2)\cos \mathrm{nt} \cos \omega t] - \mathbf{J}\alpha[2\mathrm{n}\omega \sin \mathrm{nt} \cos \omega t + (\mathrm{n}^2 + \omega^2)\cos \mathrm{nt} \sin \omega t]$$

.

2. Το σύστημα αναφοράς $S(Oxyz)$ περιστρέφεται ως προς αδρανειακό σύστημα $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega} = 2t\boldsymbol{\iota} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Τα $\boldsymbol{\iota}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος $S(Oxyz)$. Τα $S_0(\Omega\xi\eta\zeta)$ και $S(Oxyz)$ έχουν κοινή αρχή O. Να βρεθεί η έκφραση της ταχύτητας και της επιταχύνσεως ως προς το αδρανειακό σύστημα ενός σημείου P, του οποίου το διάνυσμα θέσεως είναι $\mathbf{r} = t\boldsymbol{\iota} + 2t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.