ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ **25/06/2019**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ και ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1^o

Α] Ποια η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κυκλικών τροχιών εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων; Ποια η ταχύτητα (μέτρο και διεύθυνση) με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί το υλικό σημείο εντός πεδίου κεντρικών δυνάμεων έτσι ώστε να διαγράψει κυκλική τροχιά;

Β] Τεχνητός δορυφόρος κινείται γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0. Πόσο (%) πρέπει να αυξηθεί στιγμιαία η ταχύτητα του δορυφόρου ώστε να φτάσει σε μέγιστη απόσταση $2\mathrm{r}_0$ από τη Γη; (Η Γη να θεωρηθεί ως υλικό σημείο). (**2 μονάδες**)

Λύση

α) Βλ. Χατζηδημητρίου παράγραφος 6.4 (Α' μέρος)

β) Η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς είναι $\upsilon_0^2 = \dfrac{GM}{r_0}$.

Αφού αυξηθεί η ταχύτητα σε υ_1, το σώμα θα κάνει ελλειπτική τροχιά. Για $r=r_0$ (όπου γίνεται η στιγμιαία αύξηση) θα έχουμε το περίκεντρο της έλλειψης ενώ το $r=2r_0$ θα είναι το απόκεντρο (μέγιστη απομάκρυνση).

Άρα η νέα έλλειψη έχει μεγάλο ημιάξονα $a = \dfrac{3}{2}r_0$ και στην θέση $r=r_0$ η ταχύτητα θα είναι

$$\upsilon_1^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GMm}{m}\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{(3/2)r_0}\right) = \frac{4GM}{3r_0}$$

Συνεπώς $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\upsilon_1 - \upsilon_0}{\upsilon_0} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 15.6\%$

Μέρος της απάντησης του πρώτου ερωτήματος είναι στο βιβλίο των Γ. Καραχάλιου και Β. Λουκόπουλου, παράγραφος 3.6.

ΘΕΜΑ 2^o

Εκφράστε τις διανυσματικές μονάδες $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ενός σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων συναρτήσει των διανυσματικών μονάδων $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Οι διανυσματικές μονάδες $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ είναι ίδιες σε διαφορετικά σημεία του χώρου; (**1 μονάδα**)

Λύση

Βιβλίο Ι. Χατζηδημητρίου, παράγραφος 1.3 (Α' μέρος).
Βιβλίο Γ. Καραχάλιου και Β. Λουκόπουλου, παράγραφος 1.2.

ΘΕΜΑ 3^o

Α) Δίδεται ακίνητο σύστημα αναφοράς S_0 με αρχή το O και με μοναδιαία διανύσματα τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Δίδεται επίσης σύστημα αναφοράς S με αρχή το O και με μοναδιαία διανύσματα τα $\mathbf{i,j,k}$. Κατά την στιγμή $t=0$ τα δύο συστήματα συμπίπτουν. Το S στρέφεται περί το O με γωνιακή ταχύτητα **ω.** Να ευρεθεί η χρονική μεταβολή διανύσματος **A** ως προς το S_0 συναρτήσει της χρονικής μεταβολής του **A** ως προς το *S.* Τι θα προκύψει αν το *S* εκτελεί και μεταφορική κίνηση; Τι θα προκύψει αν τεθεί $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$;

Β) Αποδείξτε τις σχέσεις που συνδέουν την σχετική και απόλυτη ταχύτητα κα την σχετική και απόλυτη επιτάχυνση υλικού σημείου. **(2 μονάδες)**

Λύση

Βιβλίο Γ. Καραχάλιου και Β. Λουκόπουλου, παράγραφος 5.1, 5.2, 5.3.
Βιβλίο Ι. Χατζηδημητρίου, παράγραφος 9.2, 9.3, 9.4 (Α’ μέρος).

ΘΕΜΑ 4°

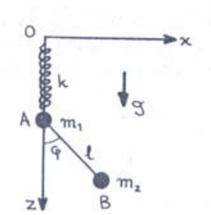
Να δείξετε από ποιο (γενικευμένο) δυναμικό προέρχονται οι δυνάμεις Lorentz, $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Δύναμη Lorentz είναι η δύναμη που ασκείται επί φορτισμένου σωματιδίου φορτίου q, το οποίο κινείται σε ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως **E** και μαγνητικής επαγωγής **B**. Τα διανύσματα **E** και **B** επαληθεύουν τις εξισώσεις του Maxwell: $\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$, $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(J+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$. **(2 μονάδες)**

Λύση

Βιβλίο Γ. Καραχάλιου και Β. Λουκόπουλου, παράγραφος 8.2 β.
Βιβλίο Ι. Χατζηδημητρίου, παράγραφος 2.10 (Β’ μέρος).

ΘΕΜΑ 5°

Η μάζα m_1 στο παρακάτω σχήμα είναι υποχρεωμένη να κινείται στον κατακόρυφο άξονα OZ και η m_2 πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο XOZ. Το άνω άκρο του ελατηρίου είναι σταθερό (σημείο O). Το ελατήριο έχει σταθερά ελατηρίου k και φυσικό μήκος ℓ_0. Η μάζα του νήματος του εκκρεμούς, καθώς και του ελατηρίου θεωρούνται αμελητέες. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση Lagrange του συστήματος, καθώς και οι εξισώσεις κινήσεως αυτού. Τέλος, να βρείτε τα ολοκληρώματα κινήσεως.



(2 μονάδες)

Λύση

Στην περίπτωση που η m_1 κινείται πάνω στον ΟΖ οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων της m_2 είναι

$$x_2 = l\eta\mu\varphi, \qquad z_2 = z_1 + l\sigma\upsilon\nu\varphi \tag{1΄}$$

Παραγωγίζοντας τις (1΄) ως προς το χρόνο βρίσκουμε

$$\dot{x}_2 = l\dot{\varphi}\sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \dot{z}_2 = \dot{z}_1 - l\dot{\varphi}\eta\mu\varphi$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}\,m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2(\dot{z}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{z}_1\dot{\varphi}\eta\mu\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας του συστήματος είναι

$$-m_1gz_1 - m_2gz_2 = -m_1gz_1 - m_2g(z_1 + l\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

και η δυναμική ενέργεια τάσης του ελατηρίου είναι

$$\frac{1}{2}\,k(z_1 - l_0)^2$$

Άρα η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{z}_1^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{z}_1\dot{\varphi}\eta\mu\varphi) + m_2g(z_1 + l\sigma\upsilon\nu\varphi) + m_1gz_1 - $$
$$-\frac{1}{2}k(z_1 - l_0)^2$$

Αντικαθιστώντας την (2΄) στις εξισώσεις Lagrange ως προς z_1 και φ βρίσκουμε τελικά ότι οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του συστήματος είναι

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 - m_2l\ddot{\varphi}\eta\mu\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sigma\upsilon\nu\varphi + k(z_1 - l_0) - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$l\ddot{\varphi} - \ddot{z}_1\eta\mu\varphi + g\eta\mu\varphi = 0$$

Τα ολοκληρώματα της κινήσεως προκύπτουν ελέγχοντας εάν η συνάρτηση του Lagrange περιέχει εκπεφρασμένα τον χρόνο κι εάν υπάρχουν αγνοήσιμες ή κυκλικές γενικευμένες συντεταγμένες.

ΘΕΜΑ 6ο

Τι ονομάζουμε λογισμό των μεταβολών ή θεωρία μεταβολών; Διατυπώστε την αρχή του Hamilton. Ποια τα πλεονεκτήματα των εξισώσεων του Lagrange; (**1 μονάδα**)

Λύση

Σημειώσεις Β. Λουκόπουλου «ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ», «ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ» αναρτημένες στην ιστοσελίδα του Τμήματος.