Υπολογιστική Φυσική
Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου 2011

Πατρα, 11 Φεβρουαριου 2011

1 Θέμα 1

1.1 Διατύπωση

Στην αριθμητική διαπραγμάτευση ενός κοσμολογικού μοντέλου εμπλέκονται οι ρίζες ενός «χαρακτηριστικού πολυωνύμου» $p(x)$, ογδόου βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές (ανιόντες κατά τις κατιούσες δυνάμεις του x),

$$p(x) = a_1x^8 + a_2x^7 + a_3x^6 + a_4x^5 + a_5x^4 + a_6x^3 + a_7x^2 + a_8x + a_9. \tag{1}$$

1.2 Ερωτήσεις

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(x)$.
2. Να εντοπίσετε τη ρίζα με το μεγαλύτερο, κατά την απόλυτη τιμή του, πραγματικό μέρος και θετικό φανταστικό μέρος.
3. Να επεξεργασθείτε τη ρίζα αυτή με μία «αριθμητική διαδικασία στίλβωσης», ώστε τελικώς να την υπολογίσετε με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια.

1.3 Υποδείξεις

1. Μπορείτε να υπολογίσετε τις μιγαδικές ρίζες με χρήση του κύριου προγράμματος (driver) Fortran `drv_rpzero.for`, το οποίο οδηγεί το υποπρόγραμμα `SUBROUTINE RPZERO` και τα σχετικά παρελκόμενα από τη βιβλιοθήκη `SLATEC` (Ενότητα 01).
2. Μπορείτε να πραγματοποιήσετε την αριθμητική διαδικασία στίλβωσης με χρήση του κύριου προγράμματος (driver) Fortran `drv_cdnewton.for`, το οποίο οδηγεί το υποπρόγραμμα `SUBROUTINE CDNEWTON` και τα σχετικά παρελκόμενά του (Ενότητα 02-1).

1.4 Δεδομένα

1. Συντελεστές a_i (το 'λήγον ψηφίο αριθμού μητρώου' παριστάνεται με Ψ).
$\Psi = 1$: 3, 10, 21, 44, 65, 102, 133, 184, 261.
$\Psi = 2$: 6, 15, 28, 55, 78, 119, 152, 207, 290.
$\Psi = 3$: 9, 20, 35, 66, 91, 136, 171, 230, 319.
$\Psi = 4$: 12, 25, 42, 77, 104, 153, 190, 253, 348.
$\Psi = 5$: 15, 30, 49, 88, 117, 170, 209, 276, 377.

$\Psi = 6$: 18, 35, 56, 99, 130, 187, 228, 299, 406.
$\Psi = 7$: 21, 40, 63, 110, 143, 204, 247, 322, 435.
$\Psi = 8$: 24, 45, 70, 121, 156, 221, 266, 345, 464.
$\Psi = 9$: 27, 50, 77, 132, 169, 238, 285, 368, 493.
$\Psi = 0$: 27, 50, 77, 132, 169, 238, 285, 368, 493.
2. Το «σφάλμα στρογγύλευσης», στη διπλή ακρίβεια, είναι 2.22×10^{-16}. Στην πράξη, η «ελάχιστη ανοχή» ή το «ελάχιστο όριο σφάλματος» επιλέγεται ως το διπλάσιο περίπου του σφάλματος στρογγύλευσης, δηλαδή 5×10^{-16}.

1.5 Αποτελέσματα

1. Να καταγράψετε την υποδεικνυόμενη ρίζα πριν και μετά την αριθμητική διαδικασία στίλβωσης.
2. Να καταγράψετε την τιμή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(x)$ στην υποδεικνυόμενη ρίζα. Η τιμή αυτή παριστάνει ένα μέτρο της ακρίβειας υπολογισμού της συγκεκριμένης ρίζας.

2 Θέμα 2

2.1 Διατύπωση

Όταν ένα σώμα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, η «ολική ισχύς της ακτινοβολίας» (= αθροιστική ισχύς για όλα τα μήκη κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας) αναφέρεται ως **φωτεινότητα** (**luminosity**), L, του εν λόγω σώματος. Η φωτεινότητα έχει μονάδες ισχύος, οπότε στο σύστημα "SI" μετριέται σε W. Ως **λαμπρότητα** (**brightness**), b, ενός σώματος που εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, σε απόσταση r από το σώμα, ορίζεται η ροή ενέργειας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στην απόσταση αυτή,

$$b = \frac{L}{4\,\pi\,r^2}. \tag{2}$$

Η λαμπρότητα έχει μονάδες ροής ενέργειας, οπότε στο σύστημα "SI" μετριέται σε $\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$ ή, ισοδύναμα, σε $\mathrm{W\,m^{-2}}$.

Θεωρούμε ένα σφαιρικό μέλαν σώμα φωτεινότητας L και ακτίνας R. Η λαμπρότητα στην επιφάνεια του σώματος, b_{S}, ονομάζεται «επιφανειακή λαμπρότητα»,

$$b_{\mathrm{S}} = b(R) = \frac{L}{4\,\pi\,R^2}. \tag{3}$$

Ως «φασματική συνάρτηση επιφανειακής λαμπρότητας», $b_{\mathrm{S},\lambda}$, ορίζεται η συνάρτηση που δίνει για μία τιμή λ του μήκος κύματος τη συνεισφορά του στοιχειώδους εύρους μηκών κύματος μεταξύ λ και $\lambda + d\lambda$ στην επιφανειακή λαμπρότητα b_{S}. Το μέγεθος αυτό έχει μονάδες ροής ενέργειας ανά μονάδα μήκους κύματος, οπότε στο σύστημα "SI" μετριέται σε $\mathrm{J\,m^{-3}\,s^{-1}}$ ή, ισοδύναμα, σε $\mathrm{W\,m^{-3}}$. Αθροίζοντας για όλα τα μήκη κύματος, βρίσκουμε την επιφανειακή λαμπρότητα,

$$b_{\mathrm{S}} = \int_0^\infty b_{\mathrm{S},\lambda}\,d\lambda. \tag{4}$$

Η σχέση που συνδέει την επιφανειακή λαμπρότητα, b_{S}, του μέλανος σώματος με την απόλυτη θερμοκρασία του, T, βρέθηκε πειραματικά από τον Josef Stefan περί το 1880 και αποδείχθηκε στη συνέχεια θεωρητικά από τον Ludwig Boltzmann. Σύμφωνα με τη σχέση αυτή, **η επιφανειακή λαμπρότητα του μέλανος σώματος είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της απόλυτης θερμοκρασίας του** (**Νόμος των Stefan–Boltzmann**),

$$b_{\mathrm{S}} = \sigma\, T^4. \tag{5}$$

Η σταθερά σ του νόμου αυτού ονομάζεται «σταθερά του Stefan» και έχει την τιμή

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}. \tag{6}$$

Ο Max Planck περιέγραψε εμπειρικά τη συμπεριφορά της φασματικής συνάρτησης επιφανειακής λαμπρότητας με χρήση της εξίσωσης

$$b_{\mathrm{S},\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda\, T}\right) - 1}, \tag{7}$$

προσδιορίζοντας τις τιμές $C_1 = 3.74 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,m^2\,s^{-1}}$ και $C_2 = 1.44 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,K}$ για τις δύο σταθερές της Εξίσωσης (7). Αργότερα κατάφερε να αποδείξει την Εξίσωση 7, οπότε και επιβεβαίωσε θεωρητικά τη μορφή που έχει η φασματική συνάρτηση επιφανειακής λαμπρότητας μέλανος σώματος. Μέσω της απόδειξης αυτής, ταυτοποίησε τις δύο σταθερές της Εξίσωσης (7) με τις ποσότητες $C_1 = 2\,\pi\, h\, c^2$ και $C_2 = \frac{h\,c}{k}$.

2.2 Ερωτήσεις

1. Να υπολογίσετε αριθμητικά την τιμή b_{S} του ολοκληρώματος (4).
2. Να υπολογίσετε την επί τοις εκατό απόκλιση, D_{Bpc}, του αποτελέσματος από την αντίστοιχη τιμή του Νόμου (5),

$$D_{\mathrm{Bpc}} = 100 \times \frac{b_{\mathrm{S}} - \sigma\, T^4}{\sigma\, T^4}. \tag{8}$$

3. Να υπολογίσετε τη φωτεινότητα του μέλανος σώματος υποθέτοντας ότι αυτό είναι ο Ήλιος· η ακτίνα του Ήλιου είναι $R_\odot = 6.96 \times 10^5\,\mathrm{km} = 6.96 \times 10^8\,\mathrm{m}$.
4. Να υπολογίσετε την επί τοις εκατό απόκλιση, D_{Lpc}, του αποτελέσματος από την αντίστοιχη τιμή της φωτεινότητας του Ήλιου, $L_\odot = 3.9 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$,

$$D_{\mathrm{Lpc}} = 100 \times \frac{L - L_\odot}{L_\odot}. \tag{9}$$

2.3 Υποδείξεις

1. Μπορείτε να υπολογίσετε αριθμητικά την τιμή b_{S} του ολοκληρώματος (4) με χρήση του κύριου προγράμματος (driver) Fortran `drv_dgaus8.for`, το οποίο οδηγεί το υποπρόγραμμα `SUBROUTINE DGAUS8` και τα σχετικά παρελκόμενα από τη βιβλιοθήκη `SLATEC` (Ενότητα 08).
2. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως άνω όριο ολοκλήρωσης μία τιμή $\sim 10^{-3}\,\mathrm{m}$, δεδομένου ότι η κύρια συνεισφορά στην φωτεινότητα οφείλεται στην περί το ορατό περιοχή του φάσματος.

2.4 Δεδομένα

1. Θερμοκρασία T σε βαθμούς Kelvin (K).
$\Psi = 1$: 5300.
$\Psi = 2$: 5400.
$\Psi = 3$: 5500.
$\Psi = 4$: 5600.
$\Psi = 5$: 5700.
$\Psi = 6$: 5800.
$\Psi = 7$: 5900.
$\Psi = 8$: 6000.
$\Psi = 9$: 6100.
$\Psi = 0$: 6200.

2.5 Αποτελέσματα

1. Να καταγράψετε τα αριθμητικά αποτελέσματα των Ερωτήσεων 1–4.

3 Θέμα 3

3.1 Διατύπωση

Θεωρούμε γενικά σχετικιστικά πολυτροπικά μοντέλα για μή μαγνητικούς και μή περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, δηλαδή για αδιατάρακτους αστέρες νετρονίων με σφαιρικό σχήμα. Αυτά τα μοντέλα διέπονται από τις διαφορικές εξισώσεις Oppenheimer–Volkoff (OV), οι οποίες είναι οι σχετικιστικές εξισώσεις (1) της υδροστατικής ισορροπίας,

$$\frac{dP}{dr} = -\,\frac{(E+P)\left(m + 4\,\pi\,r^3\,P\right)}{r\,(r - 2\,m)}, \tag{10}$$

και (2) της μάζας–ενέργειας,

$$\frac{dm}{dr} = 4\,\pi\,r^2\,E. \tag{11}$$

$E(r)$ είναι η πυκνότητα μάζας–ενέργειας στο r, $P(r)$ η πυκνότητα στο r, και $m(r)$ η μάζα–ενέργεια εντός σφαίρας ακτίνας r.

Στην περίπτωση των πολυτροπικών μοντέλων, η πίεση δίδεται από την «πολυτροπική καταστατική εξίσωση»,

$$P = K\,\rho^{\Gamma} = K\,\rho^{1+(1/n)}, \tag{12}$$

όπου K είναι η «πολυτροπική σταθερά», Γ ο «αδιαβατικός δείκτης» που ορίζεται ως

$$\Gamma = 1 + (1/n)\,, \tag{13}$$

το n παριστάνει τον «πολυτροπικό δείκτη» και, τέλος, ρ είναι η «πυκνότητα μάζας ηρεμίας». Η «πυκνότητα μάζας–ενέργειας», E, δίδεται από τη σχέση

$$E = \rho + U = \rho + n\,P, \tag{14}$$

όπου $U = n\,P$ είναι η «πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας».

Με χρήση των πολυτροπικών σχέσεων (12)–(14), οι Εξισώσεις (10)–(11) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= -\frac{[\rho + (1+n)\,P]\,\left(m + 4\,\pi\,r^3\,P\right)}{r\,(r - 2\,m)\,\dfrac{dP}{d\rho}} \\ &= -\frac{\left[\rho + K\,(1+n)\,\rho^\Gamma\right]\,\left(m + 4\,K\,\pi\,r^3\,\rho^\Gamma\right)}{K\,\Gamma\,r\,(r - 2\,m)\,\rho^{1/n}}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\,\pi\,r^2\,(\rho + n\,P) = 4\,\pi\,r^2\,\left(\rho + K\,n\,\rho^\Gamma\right). \tag{16}$$

Όλες οι ποσότητες δίδονται ή υπολογίζονται σε «βαρυτικές μονάδες» (οι οποίες λέγονται και «γεωμετρικές μονάδες») που έχουν τη μορφή cm^γ, όπου ο εκθέτης γ προκύπτει από τη διαστατική ανάλυση. Στο σύστημα των βαρυτικών μονάδων, οι αριθμητικές τιμές για την ταχύτητα του φωτός, c, και την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, G, έχουν αναχθεί σε μονάδα, $c = G = 1$. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα, αναφέρουμε ότι οι βαρυτική μονάδα της μάζας είναι $\mathrm{cm}^1 = \mathrm{cm}$, δηλαδή συμπίπτει με τη μονάδα μήκους.

Για να είναι δυνατή η εκκίνηση της αριθμητικής επίλυσης της Εξίσωσης (15) από το κέντρο το αστέρα, $r = 0$, η μεταβλητή r αντικαθίσταται στον παρονομαστή της εξίσωσης αυτής από $r + \epsilon$, όπου ϵ μικρή ποσότητα (π.χ., $\epsilon = 10^{-6}$).

3.2 Ερωτήσεις

1. Να επιλύσετε αριθμητικά τις διαφορικές εξισώσεις (15)–(16).
2. Από την επίλυση, να υπολογίσετε την ακτίνα, R, και την μάζα–ενέργεια, $M = m(R)$, του αστέρα.

3.3 Υποδείξεις

1. Μπορείτε να επιλύσετε το σύστημα των δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού (15)–(16) με χρήση του κύριου προγράμματος (driver) Fortran `drv_dderkf.for`, το οποίο οδηγεί το υποπρόγραμμα `SUBROUTINE DDERKF` και τα σχετικά παρελκόμενα από τη βιβλιοθήκη `SLATEC` (Ενότητα 04-0).
2. Αρχικά, επιχειρείτε την επίλυση στο διάστημα $[0\,\mathrm{cm},\ 10^6\,\mathrm{cm}]$.
3. Διαπιστώνετε όμως ότι η επίλυση τερματίζεται πλησίον (σχεδόν επί) της ακτίνας, αφού από εκεί και μετά η συνάρτηση της πυκνότητας μάζας ηρεμίας καθίσταται μικρότερη του μηδενός, $\rho(r > R) < 0$. Οπότε όροι όπως οι ρ^Γ και $\rho^{1/n}$ δεν ορίζονται πλέον επί του άξονα των πραγματικών αριθμών και η εκτέλεση του προγράμματος τερματίζεται με την εκτύπωση σχετικού διαγνωστικού μηνύματος.
4. Τότε μπορείτε να επαναλάβετε την επίλυση στο διάστημα $[0,\ R_{\mathrm{cut}}]$, όπου R_{cut} είναι η αριθμητική τιμή τερματισμού της προηγούμενης επίλυσης, στρογγυλευμένη όμως με ακρίβεια ολιγότερων δεκαδικών ψηφίων (δύο ή τριών ολιγότερων) από αυτά που αναφέρονται στο προηγούμενο τερματικό διαγνωστικό μήνυμα.
5. Η τιμή R_{cut} αποτελεί μία πολύ ικανοποιητική προσέγγιση της ακτίνας R του αστέρα, $R \simeq R_{\mathrm{cut}}$.
6. Στο αρχείο αποτελεσμάτων της δεύτερης επίλυσης μπορείτε να εντοπίσετε, στην τελευταία γραμμή και στην αντίστοιχη στήλη, την τιμή της συνάρτησης $m(R)$ που είναι και η μάζα–ενέργεια του αστέρα, $M = m(R)$.

3.4 Δεδομένα

1. n, K, $\rho(0) = Y(1)$, $m(0) = Y(2)$
$\Psi = 1$: 1.5, 3.389×10^7, 2.962×10^{-13}, 0.
$\Psi = 2$: 2.0, 1.291×10^5, 3.027×10^{-13}, 0.
$\Psi = 3$: 2.5, 2.980×10^3, 2.428×10^{-13}, 0.
$\Psi = 4$: 2.9, 1.449×10^2, 8.005×10^{-14}, 0.
$\Psi = 5$: 1.5, 3.389×10^7, 2.962×10^{-13}, 0.
$\Psi = 6$: 2.0, 1.291×10^5, 3.027×10^{-13}, 0.
$\Psi = 7$: 2.5, 2.980×10^3, 2.428×10^{-13}, 0.
$\Psi = 8$: 2.9, 1.449×10^2, 8.005×10^{-14}, 0.
$\Psi = 9$: 1.5, 3.389×10^7, 2.962×10^{-13}, 0.
$\Psi = 0$: 2.0, 1.291×10^5, 3.027×10^{-13}, 0.

3.5 Αποτελέσματα

1. Να καταγράφετε τα αριθμητικά αποτελέσματα για την ακτίνα και τη μάζα–ενέργεια του αστέρα νετρονίων.